

Convección térmica en fluidos, medios porosos y medios porosos con fracturas inclinadas

ERICK LUNA, ABRAHAM MEDINA Y CANDELARIO PÉREZ-ROSALES*

Resumen. Se presenta una revisión sobre el problema de la convección térmica en fluidos, medios porosos homogéneos saturados y en fracturas inclinadas llenas de fluido inmersas en matrices porosas de muy baja permeabilidad. En este último caso presentamos algunos resultados nuevos entre los cuales destacan la curvatura de las isoterma en el medio poroso, alrededor de la fractura, y la existencia de movimiento convectivo para todo número de Rayleigh.

Palabras Clave: fluidos, medios porosos, fracturas, convección.

Thermal Convections in Fluids, Porous Media and Porous Media Containing Tilted Fractures

Abstract. We give a review about the problem of thermal convection in fluids, homogeneous porous media and in tilted fractures embedded in porous media with very low permeability. In the later case we show some new results referred to the complex form of the isotherms in the porous media, nearby the fracture, and the existence of convective motion for all Rayleigh number.

Keywords: fluids, porous media, fractures, convections.

Recepción: 8 de noviembre de 2000

Aceptación: 18 de junio de 2001

Introducción

Cuando un fluido bajo la acción del campo gravitatorio se calienta no uniformemente, el equilibrio mecánico puede mantenerse sólo bajo ciertas condiciones. Si la temperatura es marcadamente no uniforme, el equilibrio se hace inestable y la perturbación resultante produce movimiento convectivo. Por otro lado, si las condiciones son tales que

hacen imposible el equilibrio, la convección continuará aunque se haga pequeña la no uniformidad en la temperatura. También, en este caso, el incremento de la diferencia de temperatura lleva a una crisis, debida a la inestabilidad del mismo movimiento convectivo. Ambas situaciones representan casos especiales de un fenómeno más interesante llamado inestabilidad hidrodinámica.

Es bien sabido que la investigación sistemática de las inestabilidades convectivas comenzó con los experimentos de Benard en 1900 (citado en Gershuni y Zhukhovitskii, 1976), quien observó la iniciación de convección espacialmente periódica en una capa horizontal de fluido calentada desde abajo (celdas de Benard). Posteriormente, en 1916, Lord Rayleigh estudió teóricamente la estabilidad del equilibrio en este sistema y determinó la existencia de

* Coordinación de Ingeniería de Yacimientos, Instituto Mexicano del Petróleo, A.P. 14-805, C.P. 07730, México, D.F. Correo electrónico: amedina@www.imp.mx.
Este trabajo ha sido apoyado por el IMP en los proyectos de investigación D.00010 y FIES 98-58-I.

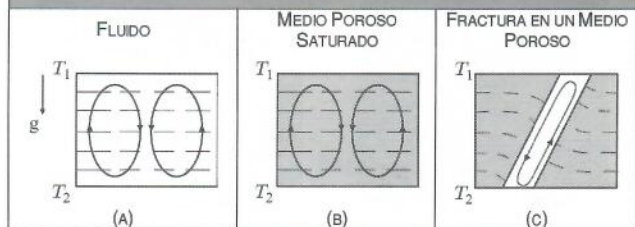
un valor crítico de una función de la temperatura —el número de Rayleigh— para el inicio del movimiento convectivo en el caso ideal de una capa fluida con dos superficies libres (Rayleigh, 1916). Las considerables dificultades en los cálculos impidieron desarrollos subsecuentes en la teoría. En 1946 el científico ruso Ostroumov realizó un estudio teórico-experimental de las condiciones para la convección en un canal circular vertical (Ostroumov, 1952) y después de él varios autores investigaron la inestabilidad convectiva de equilibrio de fluido en cavidades de varias formas.

En la época en que Ostroumov formuló el problema de la convección para otras geometrías, a mediados de la década de 1940, Horton y Rodgers (1945) y Lapwood (1948) aplicaron de manera independiente las ideas de Rayleigh en el estudio de la convección térmica en medios porosos homogéneos saturados de fluido (por ejemplo, un montón de arena saturada con agua sujeto a un gradiente térmico) (Nield y Bejan, 1999). Ese estudio permitió determinar nuevamente la existencia de otro valor crítico del número de Rayleigh (aproximadamente un orden de magnitud menor que el encontrado en la capa fluida) para el inicio del movimiento convectivo del fluido que satura al medio poroso. Una variante de este último problema es cuando el medio poroso muy poco permeable y sujeto a un gradiente vertical contiene fracturas inclinadas llenas de fluido. En este problema, a diferencia de los dos anteriores, la interacción térmica fluido-sólido es muy importante, y los estudios recientes indican que para todo número de Rayleigh hay movimiento convectivo (Luna *et al.*, 2001; Woods y Linz, 1992).

Es importante mencionar que todos estos estudios han sido motivados por los aspectos prácticos de los fenómenos convectivos y su importancia en la comprensión de eventos atmosféricos, oceanográficos así como geológicos, en la industria química y de extracción de petróleo, por mencionar sólo algunos. En el área petrolera los fluidos ocurren principalmente en medios porosos homogéneos y en medios porosos fracturados, los cuales comúnmente están bajo la acción de la gravedad (g) y de un gradiente geotérmico (que en promedio tiene un valor de 3°C por cada 100 m de profundidad). En la figura 1 mostramos gráficamente la forma en la que ocurre el movimiento convectivo. Las curvas cerradas (rollos de convección) corresponden al movimiento convectivo en una capa fluida (a), en un medio poroso saturado (b) y en el interior de una fractura inclinada (c). Las líneas punteadas indican la forma de las isotermas.

En todos los casos los estudios experimentales confirman todos los aspectos cualitativos y cuantitativos ilustrados anteriormente. Con la finalidad de comprender con más profundidad la convección térmica en la sección siguiente pre-

FIGURA 1. PATRONES DEL MOVIMIENTO CONVECTIVO (CURVAS CERRADAS). EN A) UNA CAPA FLUIDA B) UN MEDIO POROSO SATURADO Y C) UNA FRACTURA INCLINADA. EN LOS CASOS A) Y B) EL MOVIMIENTO INICIA EN VALORES BIEN DEFINIDOS (CRÍTICOS) DEL NÚMERO DE RAYLEIGH MIENTRAS QUE EN C) EL MOVIMIENTO OCURRE PARA CUALQUIER VALOR DE ESTE NÚMERO.



sentamos los aspectos teóricos (no lineales) más esenciales de este fenómeno.

I. Aspectos teóricos de la convección térmica

El estudio de la convección térmica en cualquiera de los sistemas antes mencionados requiere de plantear el problema a partir de la mecánica de fluidos. En las siguientes subsecciones discutiremos muy brevemente las ecuaciones y sus soluciones más sobresalientes.

1. Capa horizontal de fluido

El caso más simple y más estudiado de la convección térmica es aquel en donde se considera una capa fluida horizontal de espesor L la cual está sujeta a la diferencia de temperatura $\Delta T = T_2 - T_1$. Las ecuaciones adimensionales de conservación de masa, momento y energía, que describen los flujos bajo estas condiciones, considerando la aproximación de Boussinesq, son

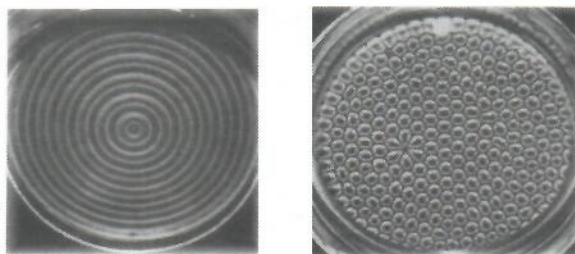
$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{v} + Ra \cdot \theta \cdot \mathbf{e}, \quad (2)$$

$$Pr \frac{\partial \theta}{\partial t} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}) = \nabla^2 \theta, \quad (3)$$

en donde Pr y Ra son los números de Prandtl y de Rayleigh, respectivamente; $\mathbf{v}$ es el campo de velocidades adimensional; p es la presión adimensional; $\mathbf{e}$ es el vector unitario en la dirección del vector aceleración de la gravedad g ; y θ es la temperatura adimensional, la cual es medida de manera que $\theta = 0$ en $z/L = 0$ y $\theta = 1$ en $z/L = 1$, es decir, $\theta = (T_2 - T)/\Delta T$. Los números adimensionales Pr y Ra son funciones de las propiedades del fluido y de la diferencia de temperatura a la cual está sujeto.

FIGURA 2. CELDAS DE CONVECCIÓN EN GEOMETRÍAS CIRCULARES. EN LA FIGURA DE LA IZQUIERDA LAS CELDAS SON CIRCULARES, MIENTRAS QUE EN LA FIGURA DE LA DERECHA LOS PATRONES SON HEXAGONALES.



Así, el número de Prandtl se define como

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}, \quad (4)$$

en donde ν es la viscosidad cinemática del fluido y κ es su difusividad térmica. Por tanto el número de Prandtl es una medida de los efectos disipativos viscosos respecto a los térmicos. De manera similar, el número de Rayleigh es definido en este problema como

$$Ra = \frac{g\beta\Delta T L^3}{\kappa\nu}, \quad (5)$$

donde g es la aceleración de la gravedad y β es el coeficiente de expansión térmica del fluido. El número de Rayleigh puede ser entendido como una medida adimensional de la diferencia de temperatura entre las partes superior e inferior de la capa fluida. Las condiciones de frontera para el problema de la convección térmica son

$$\text{en } z = 0, 1: v_z = 0, \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0; \quad (6a)$$

$$\theta = 0 \text{ en } z = 0 \quad \text{y} \quad \theta = 1 \text{ en } z = 1 \quad (6b)$$

Es relativamente simple probar, mediante el empleo del análisis de estabilidad lineal (es decir, mediante la solución en modos normales de la ecuación (1)), que existen una infinidad de soluciones estacionarias a las ecuaciones (1)-(3) bajo las condiciones de frontera (6). No obstante, el resultado general más interesante es cuando velocidad no es nula (hay un flujo global y por tanto ocurre la convección) sólo a partir de un valor definido del número de Rayleigh, el cual es

$$Ra = 657.511 \quad (7)$$

El resto de las soluciones son funciones de múltiplos de esta cantidad. También en este caso, la inestabilidad convectiva genera un solo rollo rectangular que asciende por una de las paredes verticales y desciende por la otra. En esta geometría otros patrones también son posibles, como el ilustrado en la figura 1a, el cual corresponde a dos rollos que siempre aparecen por pares y cuyas direcciones en su centro van en el mismo sentido.

En la figura 2 mostramos algunas posibles configuraciones para los patrones convectivos de fluidos en celdas circulares para números de Rayleigh entre 3 y 4 veces el Rayleigh crítico dado en la ecuación (7). Las celdas son vistas desde la parte superior de los contenedores circulares. Nótese que en general hay una enorme cantidad de posibilidades para las celdas convectivas, dependiendo de la geometría del sistema que confina al fluido y del valor del número de Rayleigh alcanzado.

2. Medio poroso homogéneo

En la introducción comentamos que Horton, Rodgers y Lapwood también encontraron, mediante el empleo del análisis de estabilidad lineal, soluciones al problema de la convección térmica en medios porosos homogéneos. En este caso, ellos consideraron una capa porosa como la mostrada en la figura 2 inciso b, de permeabilidad K y difusividad térmica κ_{ef} saturada con un fluido y sujeta a la acción de la gravedad y a la acción de un gradiente de temperatura $G = \Delta T/L$. Un cambio importante respecto al caso anterior de la capa fluida es que la difusividad térmica efectiva, κ_{ef} , es una función de las difusividades térmicas del medio poroso y del fluido. En los problemas de extracción de petróleo, por ejemplo, la conductividad térmica de la roca domina sobre la del fluido. Las ecuaciones de conservación de masa, momento y energía son, bajo la aproximación de Boussinesq y considerando la ley de Darcy para el flujo en medios porosos, de la forma (Horton y Rodgers, 1945):

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{K}{Pr L^2} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p - \mathbf{v} + Ra \cdot \theta \cdot \mathbf{e}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}) = -\nabla^2 \theta, \quad (10)$$

en donde el número de Prandtl es en este caso

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa_{ef}}, \quad (11)$$

y el número de Rayleigh, toma la forma

$$Ra = \frac{gKL\beta\Delta T}{\nu\kappa_{ef}} \quad (12)$$

La solución estacionaria, obtenida mediante el análisis de la estabilidad lineal (modos normales) y utilizando condiciones de frontera similares a las dadas en (6), es tal que el valor crítico mínimo para el inicio del movimiento convectivo global (en toda la zona donde hay fluido) es

$$Ra = 4\pi^2 \approx 40 \quad (13)$$

Es conveniente resaltar que este valor es aproximadamente un orden de magnitud menor que el encontrado para el caso de convección en un fluido.

Un ejemplo inmediato de la utilidad de estos cálculos lo obtenemos mediante la sustitución en esta expresión de los valores característicos de un yacimiento importante del Golfo de México. En este caso la permeabilidad promedio es $K=4$ darcy, la difusividad térmica efectiva es $\kappa_{ef}=0.007$ cm²/s, el ancho de la zona productora es $L=1000$ m y $\Delta T=11.2$ °C. Los fluidos a condiciones de yacimiento son tales que $\rho=0.738$ gr/cm³, $\beta=8.38 \times 10^{-4}$ 1/°C y $\mu=5.75$ cp; esto lleva a que el número de Rayleigh crítico adquiera el valor

$$Ra \approx 67, \quad (14)$$

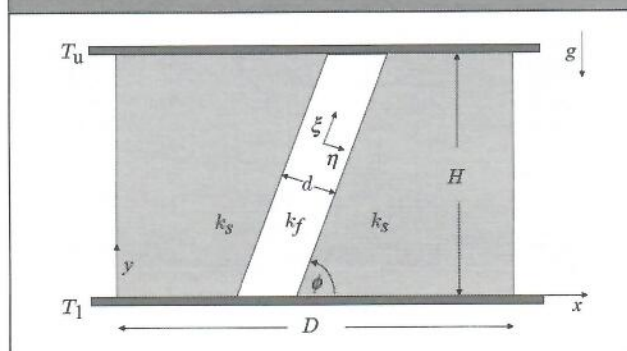
el cual supera el valor $4\pi^2$ del Rayleigh crítico. A partir de esto podría afirmarse que existe la convección. En mediciones de campo es posible ver variaciones del orden de algunos años en la temperatura. Estos cambios no pueden haber sido inducidos por la extracción de crudo o la difusión térmica, ya que el primero es un proceso a pequeña escala en comparación con las dimensiones del yacimiento y el otro, aunque global, es un proceso muy lento. En este último caso es posible evaluar el orden de magnitud de la difusión térmica en el sistema fluido-medio poroso. El tiempo de difusión (por conducción) de calor entre el fondo y la parte superior está dado por

$$t_d = \frac{L^2}{\kappa^*} \approx \frac{L^2}{\kappa^*} \approx 45300 \text{ años} \quad (15)$$

El resultado para el tiempo difusivo t_d indica claramente que la transmisión de calor por conducción se da a una escala de tiempos geológicos.

Los tiempos convectivos también pueden estimarse con los datos ya conocidos. Consideremos la velocidad media de ascenso del flujo debido a la convección. Analíticamente ésta tiene la forma

FIGURA 3. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FRACTURA INCLINADA. EL GRADIENTE VERTICAL EN LOS EXTREMOS VERTICALES, COMO EN LOS YACIMIENTOS ES $G=(T_1-T_u)/H$.



$$v_c = \frac{\rho g K \beta \Delta T}{4\mu} \quad (16)$$

La sustitución de los valores típicos del yacimiento mencionado permite encontrar que $v_c=1.18 \times 10^{-6}$ cm/s. Consecuentemente el tiempo de convección, es decir, el tiempo de ascenso de partículas desde el fondo hasta la parte superior de la zona de aceite está dado por

$$t_c = \frac{L}{v_c}, \quad (17)$$

y da un valor aproximado de $t_c \sim 2683$ años. Esta escala de tiempo también es grande comparada con los tiempos de producción y, en este sentido, la convección no debe afectar dicho proceso.

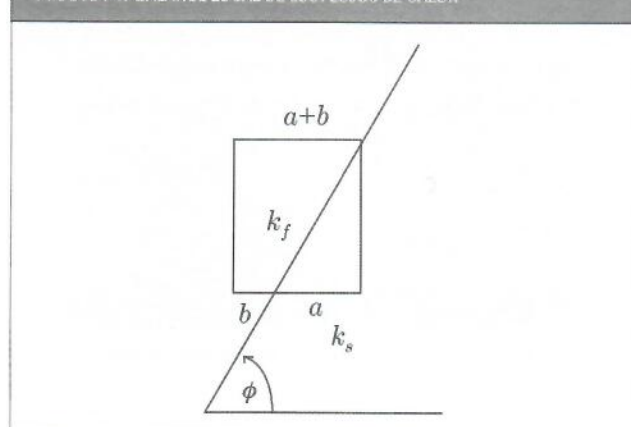
3. Medio poroso fracturado

a) Modelo fenomenológico

Una gran cantidad de yacimientos de agua y de aceite son fracturados, es decir, los flujos ocurren principalmente a través de las fracturas debido a la alta permeabilidad de las mismas y la muy baja permeabilidad de la matriz porosa. La distribución de fracturas no es muy conocida, pero si tomamos en cuenta que la ocurrencia de fracturas horizontales es poco probable puesto que su formación requeriría soportar el peso de la columna de material por encima de ella, entonces es lógico suponer que la cantidad de fracturas levemente inclinadas respecto a la vertical debe ser mayor, y por tanto éstas contribuyen más al flujo convectivo. El estudio de la convección térmica en este caso, como se comenta en la introducción, debe considerar la interacción matriz-fluidos de la fractura.

El sistema más simple posible es aquél que considera al sistema matriz-fractura como se muestra en la figura 3 (Luna,

FIGURA 4. BALANCE LOCAL DE LOS FLUJOS DE CALOR



et al., 2001). Este sistema puede ser visto como un bloque vertical de roca que contiene una fractura inclinada llena de fluido. Dicho bloque está sujeto a una diferencia de temperatura $\Delta T = T_i - T_u > 0$ donde T_i es la temperatura en la parte inferior y T_u es la temperatura en la parte superior, y todo el conjunto matriz-fractura está sujeto a la acción de la aceleración de la gravedad, g , la cual asumimos constante. De manera general consideramos una fractura inclinada a un ángulo ϕ respecto a la horizontal, con un ancho D y un grosor infinito, mientras que la matriz sólida tiene un ancho D y altura H . Esta configuración permite asegurar que en los extremos de la matriz, de conductividad térmica k_s , existe un gradiente en la dirección vertical, $G = \Delta T/H$. El fluido que llena la fractura tiene un coeficiente de expansión térmica β , densidad ρ , viscosidad dinámica μ , conductividad térmica k_f y difusividad térmica κ_f . La difusividad térmica del sólido es κ_s .

Para entender cómo ocurre la inestabilidad térmica, y consecuentemente la convección, consideremos una celda virtual que abarque las zonas fluida y sólida del medio fracturado (figura 4). Encontramos que el flujo de calor, por unidad de longitud, en la dirección vertical es

$$k_s G a + k_f G b = k_f G (a+b) \quad (18)$$

Esto lleva inmediatamente a que

$$k_s = k_f \quad (19)$$

Este último resultado no es lógico, ya que en general $k_s \neq k_f$ (en particular para petróleo en rocas carbonatadas $k_s \approx 10k_f$). Por tanto, la única opción que queda es que el balance de flujo de calor ocurra de otra manera, es decir, deberá haber un gradiente propio (G_s) de la parte sólida y

otro propio (G_f) de la parte fluida, ambos mutuamente dependientes entre sí. Físicamente, esto refleja que las isotermas (curvas de igual temperatura) no son paralelas a la horizontal, sino que se deforman cerca de la fractura. En la siguiente sección mostraremos esto con más detalle, a partir de la solución numérica de las ecuaciones de conservación de masa, momento y energía.

b) Distribución de temperaturas y solución local para un fluido

Para formular las ecuaciones de movimiento, tanto en el fluido como en la matriz sólida, consideremos en primera instancia que la fractura está en una región sólida como la mostrada en la figura 4. Las ecuaciones a resolver en el caso del fluido, para el problema planteado en la sección anterior, son las ecuaciones de conservación de momento:

$$0 = \rho \beta g (T - T_0) \sin \phi + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial \xi}, \quad (20)$$

y

$$0 = \rho \beta g (T - T_0) \cos \phi - \frac{\partial p}{\partial \eta}, \quad (21)$$

en donde T_0 es una temperatura de referencia, u es la velocidad paralela a las paredes de la fractura y p es la presión dinámica en el fluido. Además, en la construcción de estas dos ecuaciones hemos considerado la aproximación de Boussinesq en la densidad. Por otro lado, la ecuación de conservación de la energía en el fluido es

$$u \frac{\partial T}{\partial \xi} = \kappa_f \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} \right) \quad (22)$$

La solución de estas ecuaciones está sujeta a las condiciones de frontera

$$u = 0 \quad \text{y} \quad T = T_s(\xi), \quad \text{en} \quad \eta = \pm \frac{d}{2}. \quad (23)$$

$$u = 0 \quad \text{y} \quad T = T_i, \quad \text{en} \quad \xi = 0, \quad (23a)$$

$$u = 0 \quad \text{y} \quad T = T_u, \quad \text{en} \quad \xi = \xi(\eta(H)), \quad (23b)$$

Es decir, la velocidad es nula sobre las paredes de la fractura, y la temperatura sobre dichas paredes no es constante, sino depende de la coordenada ξ . En las partes superior e inferior de la matriz las temperaturas son constantes, es decir,

$$T = T_{\pm}(y), \text{ en } y_{\pm} = \frac{(D \pm d)}{2} + x \tan \phi, \quad (24)$$

Para la matriz sólida la ecuación de conservación de energía es

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k_s \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (25)$$

con condiciones de frontera a lo largo de las paredes de la fractura, en las partes superior e inferior y en las orillas de la matriz sólida, esto es

$$T = T_t, \text{ en } y=0 \quad \text{y} \quad T = T_r, \text{ en } y=H \quad (26)$$

$$T = G_y, \text{ en } x=0 \quad \text{y} \quad T = G_x, \text{ en } x=D \quad (27)$$

respectivamente.

La solución a estas ecuaciones acopladas es complicada. No obstante algunos límites interesantes pueden ser estudiados: el más inmediato es cuando la conductividad térmica del sólido domina sobre la del fluido $k_s \gg k_f$ ($\epsilon = k_s/k_f \rightarrow \infty$). Este caso es el más interesante desde el punto de vista de la ingeniería petrolera, ya que como hemos mencionado previamente, la conductividad de la roca domina sobre la del fluido. En este mismo límite consideremos un caso de fluido muy viscoso ($\mu \rightarrow \infty$); es decir, el fluido casi no se mueve o lo hace en tiempos característicos muy grandes. Entonces, $n = 0$ y lo más importante en esta aproximación son los perfiles de temperatura dentro y fuera de la fractura.

En la figura 5 mostramos la gráfica de las isothermas en la placa en una escala de grises en donde la temperatura está normalizada entre 1 (parte inferior, caliente) y 0 (parte superior, fría). Esta gráfica es ilustrativa de los complejos fenómenos que ocurren debido a la presencia de la fractura, entre ellos la deformación de las isothermas cerca de la fractura y los fuertes gradientes de temperatura en un espacio pequeño como lo es el grosor de la fractura (nótese que iguales tonos de gris corresponden a iguales temperaturas, y que dentro de la fractura estos cambios son muy abruptos). La figura 5 también permite visualizar que los gradientes en las paredes de la fractura en la zona de fluido (G_f) y en la zona sólida son diferentes (G_s). Esto ya lo sabíamos por el análisis fenomenológico presentado anteriormente, pero nuestro estudio teórico-numérico permite mostrar con gran detalle dicha variación.

En la figura 6 mostramos el comportamiento de los gradientes justo en la pared izquierda de la fractura, del lado del sólido y del fluido con viscosidad muy grande. Un aspecto notable, que aparece en esta última figura, es que

FIGURA 5. DISTRIBUCIÓN DE TEMPERATURAS EN Y ALREDEDOR DE UNA FRACTURA INCLINADA A 45 GRADOS CON $k_s \gg k_f$ Y VISCOSIDAD ALTA.

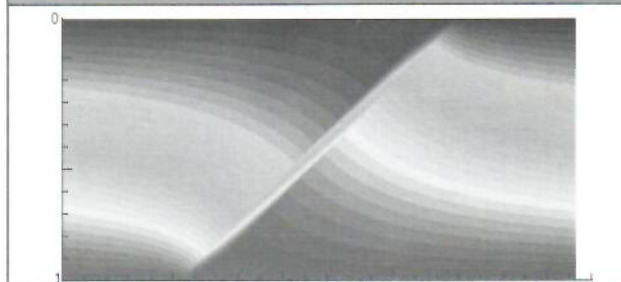


FIGURA 6. GRADIENTES DE TEMPERATURA EN LA PARED IZQUIERDA, CORRESPONDIENTE AL CASO DE LA FIGURA 5. LA CURVA SUPERIOR CORRESPONDE A G_s Y LA CURVA INFERIOR A G_f .

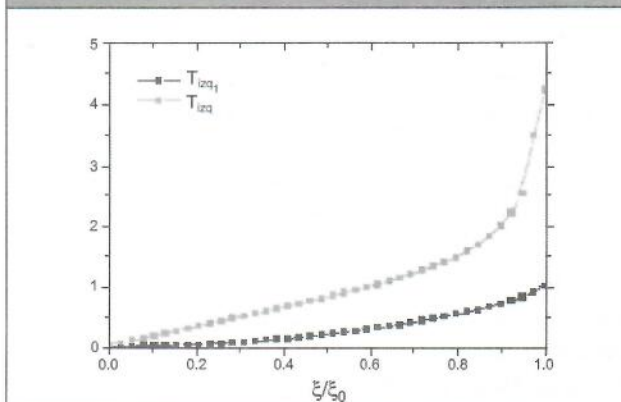
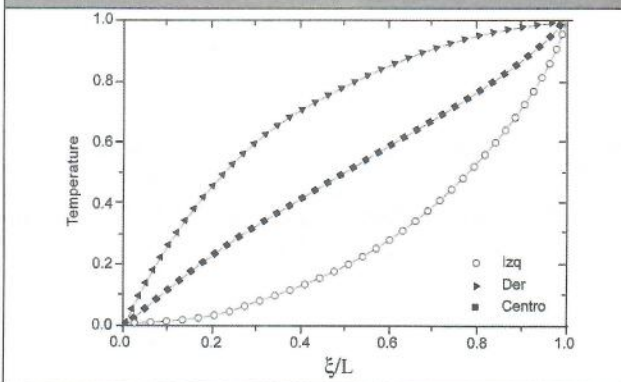


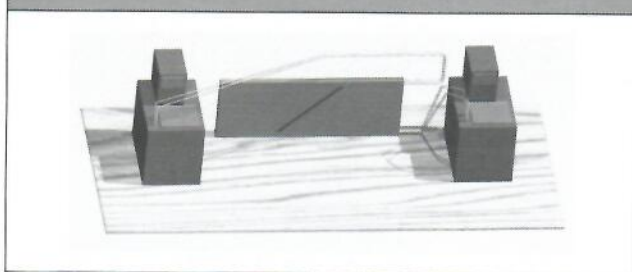
FIGURA 7. VARIACIÓN DE LA TEMPERATURA EN LAS PAREDES Y EN EL CENTRO DE LA FRACTURA CORRESPONDIENTE AL CASO DE LA FIGURA 6.



los gradientes G_s y G_f no son constantes y llegan a ser muy diferentes entre sí, conforme ξ varía desde la parte caliente hasta la parte fría. Este comportamiento también evidencia que la temperatura sobre las paredes de la fractura es una función de ξ , lo que se contrapone con las aproximaciones encontradas en la literatura.

La figura 7 muestra justamente la gráfica de las temperaturas como función de ξ , en las paredes izquierda y derecha

FIGURA 8. ARREGLO EXPERIMENTAL DE PLACA DE COBRE CON UNA FRACTURA INCLINADA LLENA DE FLUIDO.



de la fractura. En las curvas de la figura 5 es posible ajustar líneas rectas en la parte central de las curvas correspondientes a la temperatura en las paredes izquierda y derecha, con la finalidad de obtener las condiciones de frontera (ecuación 24) para la temperatura y así determinar las soluciones analíticas locales para el fluido en la fractura y analizar el posible movimiento convectivo.

El ajuste lineal permite evaluar los valores de G_s en cada lado de la fractura e inmediatamente notar que $G_s \neq G/\sin\phi$, ya que la igualdad correspondería a la simple proyección del gradiente vertical, G , sobre las paredes de la fractura, lo que, como hemos visto, no es verdad. De cualquier manera G_s es aproximadamente constante en la parte central, y cuando se consideran fracturas muy largas esta aproximación es muy útil. Cuando la fractura no es larga es posible resolver analíticamente las ecuaciones (20)-(22) en donde es necesario usar los perfiles de temperatura dados en la figura 8 (Luna *et al.*, 2001). En este caso el número de Rayleigh es

$$\frac{g\alpha\Delta T d^3}{\nu\kappa_f}\Gamma = Ra\Gamma \ll 1, \quad (28)$$

donde la razón de aspecto o razón de esbeltez de la fractura es $\Gamma = d/L$. Además, el perfil del campo de velocidades a lo largo de la fractura está dado por la expresión

$$u = (T_a - T_b) \frac{g\beta}{12\nu} [3d\eta^2 - 2\eta^3 - d^2\eta], \quad (29)$$

en donde T_a y T_b son valores del campo de temperatura en las paredes izquierda y derecha a un mismo valor ξ/L .

Es importante notar, a partir de la ecuación (29), que el campo de velocidades siempre existe, es decir, si hay un gradiente de temperatura no nulo (o sea $T_a - T_b \neq 0$) la velocidad es también no nula. Así, en este tipo de sistemas siempre hay movimiento convectivo y no hay, como en los casos anteriores, número de Rayleigh crítico.

El resultado anterior para la convección térmica en una fractura finita es también válido para fracturas infinitas. En este sentido, A. Woods (1992) realizó un estudio analítico de la convección térmica en una fractura de longitud infinita cuando el gradiente es constante (suponiendo que éste es simplemente la proyección sobre la fractura del gradiente vertical); ello le permitió encontrar que la convección siempre existe en las fracturas inclinadas, bajo cualquier gradiente de temperatura. Ya hemos mencionado que el valor del gradiente elegido por Woods no es correcto (aunque sea constante para un ángulo dado), pero nosotros sí lo podemos evaluar en forma correcta, esto es G_s (figura 6). Así, corrigiendo el modelo de Woods, llegamos a que localmente la convección existe, para una fractura muy larga, a cualquier número de Rayleigh, que bajo las adecuadas correcciones es

$$Ra = \frac{gd^3G}{\kappa_f} \quad (30)$$

c) Estudios experimentales

Hemos realizado estudios experimentales que confirman los resultados teórico-numéricos en el límite de alta conductividad del medio exterior. Ya que el caso más interesante es aquél en el que la matriz porosa es muy impermeable, una adecuada aproximación experimental es sustituir la matriz porosa por un sólido impermeable. Así, en los experimentos es posible evaluar los campos de temperatura y velocidad. Para mostrar la forma en la que esto fue hecho, en la figura 8 mostramos el arreglo experimental, que consiste en dos baños térmicos que mantienen constante la temperatura en las partes superior e inferior de una placa de cobre de 3 cm de grosor, 67 cm de longitud y $H=15.18$ cm de altura. Allí hicimos un hueco inclinado a 45° , de ancho $d=0.5$ cm y longitud $L=19.5$ cm. Dicho hueco o fractura se llenó de glicerina y se tapó con cinta tipo diurex para poder visualizar el campo de velocidades y de temperatura.

El fluido dentro de la fractura tiene las siguientes propiedades: coeficiente de expansión térmica $\alpha=4.853 \times 10^{-4}$ $1/^\circ\text{C}$, viscosidad $\nu = 2 \times 10^{-3}$ m^2/s , densidad $\rho = 1260$ kg/m^3 , calor específico $c = 2411.59$ $\text{J}/(\text{kg } ^\circ\text{C})$, conductividad térmica $k_f = 0.2838$ $\text{W}/(\text{m } ^\circ\text{C})$ y difusividad térmica $\kappa_f = 9.347 \times 10^{-8}$ m^2/s . En la placa de cobre la conductividad es $k_s = 389.11$ $\text{W}/(\text{m } ^\circ\text{C})$ y la difusividad térmica $k_s = 1.14 \times 10^{-4}$ m^2/s . El número de Prandtl en este caso es $Pr = \nu/\kappa_f = 21397$ y la razón de aspecto es $\Gamma = d/L \approx 2.5641 \times 10^{-2}$.

En los experimentos fácilmente obtenemos el caso límite en donde el cociente de difusividades térmicas $\epsilon \rightarrow \infty$, ya

que a partir de los datos previamente dados, $\varepsilon = k_f/k_j = 1372$. Recordemos que lo anterior es necesario para despreciar el acoplamiento entre los campos de temperaturas en el sólido y en la fractura llena de fluido. En los experimentos establecimos un gradiente típico de $(\Delta T/L) = (T_1 - T_u)/L = 0.2^\circ\text{C}/\text{cm}$. Las temperaturas $T_1 = 34^\circ\text{C}$ and $T_u = 30^\circ\text{C}$ se mantuvieron constantes usando baños térmicos a temperatura constante con etilenglicol como fluido térmico. Bajo estas condiciones tenemos que el número de Rayleigh en este caso es $Ra = 9.05$, y además $Ra\Gamma = 0.30$. Con estos datos $l \approx d Ra \approx 0.061$ m, y es posible comparar los perfiles de temperatura y de velocidad con las predicciones teóricas para la zona media de la fractura (ecuaciones 15 y 19, respectivamente).

Empleando velocimetría de imagen de partícula (VIP) hemos medido el campo de velocidades en la parte media de la fractura. En la figura 9 mostramos gráficamente el campo promedio en esa parte de la fractura. Nótese que el flujo es simétrico, lo cual fue predicho a través de la ecuación (29). En la figura 10 graficamos el perfil del campo de velocidades como función de d , el ancho de la fractura. Allí también hemos puesto los puntos experimentales obtenidos por medio de las mediciones de VIP, y es notable el acuerdo entre la teoría y el experimento.

Además de las mediciones del campo de velocidades, también hemos determinado experimentalmente los perfiles de temperatura cuando las placas metálicas que contienen a la fractura inclinada son calentadas desde abajo (gradiente normal) o desde arriba (gradiente invertido). En este caso hemos empleado una cámara térmica con una resolución de $0.1^\circ\text{C}/\text{cm}$; las mediciones dadas por la cámara fueron también chequeadas mediante un termómetro digital de 12 canales y una resolución de 0.01°C en cada canal. Así hemos asegurado una buena confiabilidad en la determinación de los perfiles de temperatura en cualquier punto de la placa (ver figuras 11 y 12).

Es claro que la forma de las isoterms es la misma en ambos casos, independientemente de la dirección del gradiente. Es bueno hacer la comparación con la figura 6 en donde hemos graficado numéricamente los perfiles de las isoterms para el caso del gradiente normal. La concordancia cualitativa entre las figuras 5 y 11 es excelente. Más aún, es posible hacer una comparación cuantitativa directa entre el perfil numérico adimensional dado en la figura 7 y el obtenido con la imagen infrarroja. Los puntos experimentales caen exactamente en cada una de las curvas de la figura 5 y son prácticamente indistinguibles de los resultados numéricos. De esta forma, los experimentos dan una amplia confiabilidad a los modelos aquí presentados para el estudio del problema de la convección térmica en la fractura, o así como del flujo de calor en la placa.

FIGURA 9. CAMPO DE VELOCIDADES ESTACIONARIO MEDIDO EN LA PARTE MEDIA DE UNA FRACTURA INCLINADA ($\phi = 45^\circ$) OBTENIDA MEDIANTE VELOCIMETRÍA DE IMAGEN DE PARTICULA. LAS FLECHAS INDICAN LA DIRECCIÓN DE FLUJO. LOS DATOS DEL GRADIENTE Y DE LA VELOCIDAD DE FLUJO SON DADOS EN EL TEXTO.

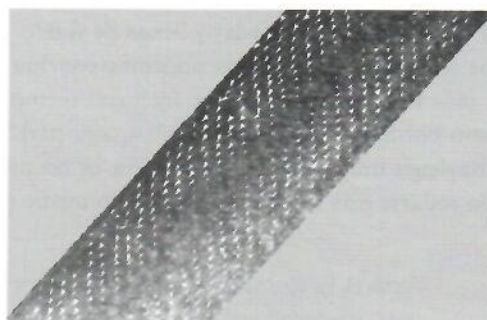


FIGURA 10. GRÁFICA DEL PERFIL DE VELOCIDADES (CURVA CONTINUA) DADA POR LA ECUACIÓN (29). LOS PUNTOS EXPERIMENTALES FUERON OBTENIDOS MEDIANTE MEDICIONES DE VIP.

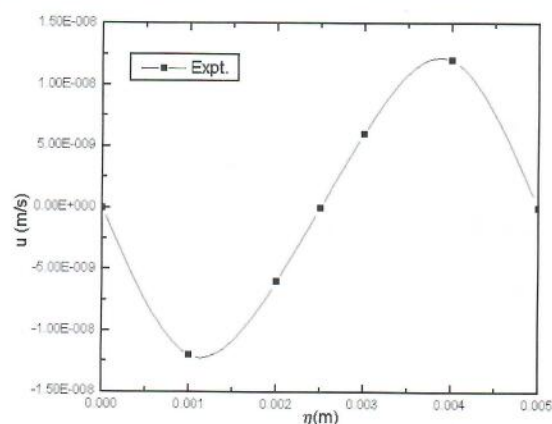


FIGURA 11. IMAGEN INFRARROJA DE LA PLACA DE COBRE CALENTADA DESDE ABAJO Y ENFRIADA EN LA CAPA SUPERIOR. NOTE LA FUERTE INFLUENCIA DE LAS FRACTURAS SOBRE LA FORMA DE LAS ISOTERMAS.



FIGURA 12. IMAGEN INFRARROJA DE LA PLACA DE COBRE AHORA CALENTADA DESDE ARRIBA Y ENFRIADA EN LA PARTE BAJA.



Conclusiones

En este trabajo hemos presentado los principales aspectos del problema de la convección térmica en diversos sistemas: capas fluidas, medios porosos saturados y medios porosos con fracturas inclinadas y llenas de fluido. A partir de los resultados presentados podemos concluir que el sistema más inestable es el de las fracturas inclinadas ya que, como confirman los experimentos, aun para números de Rayleigh muy bajos la convección es no nula. Un resultado todavía más interesante es que un medio poroso

homogéneo tiene una enorme cantidad de cavidades llenas de fluido, muchas de las cuales pueden ser consideradas como microfracturas inclinadas. En estas pequeñas regiones la convección siempre existe, y hay alrededor de estas microfracturas complejas distribuciones de temperatura como las mostradas para una sola fractura. La pregunta que surge a raíz de esto es si es posible sumar de alguna forma dichas microcorrientes convectivas y generar una corriente macroscópica. Esta pregunta merece más investigación teórica y experimental, que actualmente está en progreso. 



BIBLIOGRAFÍA

- Gershuni, G. Z. y E. M. Zhukhovitskii (1976). *Convective Stability of Incompressible Fluids*. Israel Program for Scientific Translations. Jerusalem.
- Horton, C. W. y R. T. Rodgers (1945). "Convection Currents in a Porous Media", *J. Appl. Phys.* 16:367.
- Lapwood, E. (1948). "Convection of a Fluid in Porous Medium", *Proc. Camb. Phil. Soc.* 44:508.
- Luna, E. C. Pérez-Rosales; A. Medina y F. Higuera (2001). "Convection in a Tilted Finite Fracture in a Rock", *Phys. Lett. A*, en prensa.
- Nield, D. A. y A. Bejan (1999). *Convection in Porous Media*. Springer-Verlag. New York.
- Ostroumov, G. A. (1952). *Free Convection in a Confined Medium*. Editorial MIR, Moscú.
- Rayleigh, L. (1916). "On Convection Currents in a Horizontal Layer of Fluid when the Higher Temperature is on the Under Side", *Phil Mag. Ser. 6*, 32:529.
- Woods, A. W. y S. J. Linz (1992). "Natural Convection and Dispersion in a Tilted Fracture", *J. Fluid Mech.* 241:59.

La Colmena

Revista de la Universidad Autónoma del Estado de México

Un espacio
para la expresión
lúcida, inteligente y creativa

PUBLICACIÓN TRIMESTRAL



Universidad Autónoma del Estado de México
UAEM



MAYORES INFORMES:

Av. Independencia No. 303 Ote. (altos) Col. Centro
Toluca, Estado de México, C.P. 50000
Teléfonos: (7) 213 75 29, (7) 213 75 30
E-mail: lacolmena@mail.uaemex.mx
virgrre@prodigy.net.mx