

Solitones no autónomos de la ecuación no lineal de Schrödinger con potencial lineal

Non-Autonomous Solitons of the Nonlinear Schrödinger Equation with Linear Potential

Félix Enrique Méndez Zúñiga

ROR: Universidad Autónoma del Estado México, México

fmendezzuniga@gmail.com

 <http://orcid.org/0009-0007-7994-5005>

Recepción: 23 de agosto de 2024

Aprobación: 9 de abril de 2025



Máximo Augusto Agüero Granados*

ROR: Universidad Autónoma del Estado México, México

makxim@gmail.com

 <http://orcid.org/0000-0002-9861-8997>

Tatyana Leonidovna Belyaeva

ROR: Universidad Autónoma del Estado México, México

tbl@uaemex.mx

 <http://orcid.org/0000-0002-6960-3841>

RESUMEN

Se investiga la ecuación no lineal de Schrödinger con potencial lineal. Para el estudio se utiliza el método que propone M. Ablowitz, D. Kaup, A. Newell y H. Segur con el objetivo de obtener la integrabilidad de la ecuación mencionada y la transformada de Bäcklund para soluciones solitónicas. Adicionalmente, se analiza la dinámica de un solitón y se demuestra la existencia de interacción elástica de solitones no autónomos.

PALABRAS CLAVE: solitones no autónomos, física no lineal, ecuación no lineal de Schrödinger.

ABSTRACT

In this paper we investigate the nonlinear Schrödinger equation with linear potential. For the study, the method proposed by M. Ablowitz, D. Kaup, A. Newell, and H. Segur is used with the aim of obtaining the integrability of the aforementioned equation and the Bäcklund transform for solitonic solutions. We analyze the dynamics of a soliton and demonstrate the existence of elastic interaction of non-autonomous solitons.

KEYWORDS: Non-autonomous solitons, nonlinear physics, nonlinear Schrödinger equation.

INTRODUCCIÓN

El concepto clásico de *solitón* fue desarrollado para sistemas no lineales y dispersivos que han sido autónomos; es decir, el tiempo solo ha jugado el papel de la variable independiente y no ha aparecido explícitamente en una ecuación no lineal de evolución. Sin embargo, existen situaciones frecuentes cuando un sistema está sujeto a alguna forma de fuerza externa, y estos casos son típicos para experimentos con solitones ópticos temporales y espaciales, láseres de solitones, interruptores y lógica de solitones ultra rápidos (Hasegawa y Kodama, 1995; Agrawal, 2001; Agüero Granados y Serkin, 2020 y Taylor, 1992).

*AUTOR PARA CORRESPONDENCIA

makxim@gmail.com

Históricamente, el primer estudio del movimiento acelerado de un solitón en plasma no homogéneo bajo un potencial lineal fue realizado en Chen y Liu, 1976, quienes descubrieron que, para el modelo de ecuación de Schrödinger no lineal con un potencial externo lineal, el método de transformación inversa (IST) se puede generalizar si se permite el valor propio variable en tiempo (TVE). Como consecuencia de esto, los solitones con velocidades que varían en el tiempo –pero con amplitudes invariantes el tiempo– han sido predichos (Chen y Liu, 1976). Este estudio amplió sustancialmente el concepto de *solitones clásicos*.

La interacción de solitones para los modelos generalizados de la NLSE con la dispersión, no linealidad, disipación o ganancia y los potenciales variables en tiempo se han estudiado en varios trabajos (Serkin y Hasegawa, 2000; Serkin *et al.*, 2007; Serkin *et al.*, 2010; Belyaeva y Serkin, 2011; Belyaeva *et al.*, 2021). Al comportarse como una partícula, un solitón puede acelerarse en un potencial externo cambiando su velocidad, amplitud y fase. Las nuevas clases de solitones, nombrados *solitones no autónomos*, amplían el concepto clásico al incluir la variación de parámetros como la velocidad, amplitud y fase debido a fuerzas externas. Siendo las soluciones exactas de una ecuación no lineal, solitones no autónomos interactúan elásticamente, pero mueven con amplitudes, velocidades y espectros variables y adaptados tanto al potencial externo y las variaciones de dispersión y no linealidad.

Uno de los avances más notables en la teoría de ondas no lineales fue el descubrimiento y desarrollo de un método exacto para integrar las ecuaciones no lineales de evolución, conocido como *transformación de dispersión inversa* (IST). Gardner *et al.* (1967) demostraron que las soluciones de la ecuación no lineal de Korteweg-de Vries (KdV) presentan un comportamiento de tipo solitón. La cuestión principal es cómo determinar si una ecuación no lineal de evolución es integrable. Para abordar esto, Gardner *et al.* (1967), así como Lax (1968) y el grupo AKNS formado por Ablowitz *et al.* (1973) formularon un principio general en donde asocian varias ecuaciones de evolución no lineales con operadores lineales. Ablowitz *et al.* (1973) lo formalizó elegantemente en lo que se conoce como la *jerarquía AKNS*.

Existen numerosas ecuaciones de evolución no lineales que tienen soluciones solitónicas, como la ecuación de Korteweg-de Vries, la ecuación de Boussinesq, la ecuación no lineal de Schrödinger, y la ecuación sine-Gordon, entre otras. Cada una de estas ecuaciones puede asociarse con un par de operadores matriciales diferenciales conocidos como *pares de Lax*, y es posible desarrollar el esquema AKNS para probar su integración exacta. Si una ecuación no lineal de evolución posee pares de Lax, se pueden encontrar sus soluciones solitónicas mediante diversos métodos, como la IST, las transformaciones de Bäcklund y el método de Hirota (Ablowitz y Segur, 1981).

En este artículo aplicamos el método AKNS para demostrar la integrabilidad del sistema y empleamos la transformada de Bäcklund para obtener soluciones solitónicas. A continuación, describimos ambos enfoques en detalle con base en una investigación original enfocada en el análisis de los solitones no autónomos en el contexto de la ecuación no lineal de Schrödinger con potencial lineal. El método AKNS, inicialmente propuesto para determinar la integrabilidad de ecuaciones no lineales, permite establecer que la ecuación no lineal de Schrödinger con potencial lineal es completamente integrable. Posteriormente, las soluciones solitónicas se pueden obtener utilizando la transformada de Bäcklund.

El método AKNS (Ablowitz *et al.*, 1973) consiste en unos pasos: 1) establecer un problema de dispersión lineal donde la solución de la ecuación no lineal juega el papel del potencial, 2) elegir la dependencia temporal de las funciones propias de tal manera que los valores propios permanezcan invariantes en el tiempo, 3) resolver el problema de dispersión directa en el tiempo inicial y determinar la dependencia temporal de los datos de dispersión y 4) resolver el problema de dispersión inversa en tiempos posteriores conociendo los valores propios discretos correspondientes a la dependencia temporal de los otros datos de dispersión reconstruir el potencial.

En nuestro trabajo presentamos un esquema AKNS generalizado con los valores propios que tienen una dependencia de tiempo basando en referencias (Serkin y Hasegawa, 2000; Serkin *et al.*, 2007; Serkin *et al.*, 2010; Belyaeva y Serkin, 2011). Demostramos las propiedades de los solitones no autónomos en el marco del modelo generalizado de la NLSE con el potencial lineal:

$$i \frac{\partial Q}{\partial T} + \frac{D(T)}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + R(T)|Q|^2 Q - 2\lambda(T)xQ = 0 \quad (1)$$

donde $D(T)$, $R(T)$ y $\lambda(T)$ son los coeficientes de la dispersión, la no linealidad y el potencial lineal variables en tiempo.

1. FORMALISMO AKNS GENERALIZADO

Como primer paso en la construcción del modelo completamente integrable con potencial lineal se introduce el concepto de par de Lax. En el marco del método de dispersión inversa (Ablowitz y Segur, 1981), la ecuación integrable no lineal surge como condición de compatibilidad del sistema de ecuaciones diferenciales matriciales lineales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \hat{F} \psi(x, t), \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \hat{G} \psi(x, t) \end{aligned} \quad (2)$$

donde $\psi(x, t) = \{\psi_1, \psi_2\}^T$ es una función compleja de dos componentes que se llama *la función de dispersión*. $\hat{F}$ y $\hat{G}$ son matrices (2×2) con componentes complejos.

Resolviendo la condición de compatibilidad del sistema (2):

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial t} - \frac{\partial \hat{G}}{\partial x} + [\hat{F}, \hat{G}] = 0 \quad (3)$$

se puede obtener la ecuación de evolución no lineal deseada para el potencial de dispersión $q(x, t)$.

Consideramos ahora el caso general del método de dispersión inversa con un parámetro espectral dependiente del tiempo $\Lambda(T)$ y las matrices $\hat{F}$ y $\hat{G}$.

$$\hat{F}(\Lambda; S, T) = \hat{F} \left\{ \Lambda(T), Q[S(x, t), T]; \frac{\partial Q}{\partial S} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right); \frac{\partial^2 Q}{\partial S^2} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2; \dots, \dots; \frac{\partial^n Q}{\partial S^n} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^n \right\} \quad (4.1)$$

$$\hat{G}(\Lambda; S, T) = \hat{G} \left\{ \Lambda(T), Q[S(x, t), T]; \frac{\partial q}{\partial S} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right); \frac{\partial^2 Q}{\partial S^2} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2; \dots, \dots; \frac{\partial^n Q}{\partial S^n} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^n \right\} \quad (4.2)$$

dependiente de las coordenadas generalizadas $S = S(x, T)$ y $T(t) = t$, donde la función $Q[S(x, T), T]$ dependen de los potenciales de dispersión $Q(S, T)$ y $R(S, T)$ y sus derivadas, correspondientemente. La condición para la compatibilidad del par de ecuaciones diferenciales lineales (3) toma la forma:

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial T} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial T} - \frac{\partial \hat{G}}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial x} + [\hat{F}, \hat{G}] = 0 \quad (5)$$

donde:

$$\hat{F} = -i\Lambda(T)\widehat{\sigma}_3 + \widehat{\mathcal{U}}_{\Phi} \quad (6)$$

$$\hat{\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix} \quad (7)$$

siendo $\hat{\sigma}_3$ la matriz de espín de Pauli y las matrices $\hat{\mathcal{U}}$ y $\hat{\mathcal{F}}$ son dadas por:

$$\hat{\mathcal{U}} = \sqrt{\sigma} F \gamma(T) \begin{pmatrix} 0 & Q(S,T) \\ R(S,T) & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\hat{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \exp[-i\varphi/2] & 0 \\ 0 & \exp[i\varphi/2] \end{pmatrix} \quad (9)$$

donde $F(T)$ y $\varphi(S, T)$ son funciones reales desconocidas que se tienen que encontrar, γ es una constante arbitraria y el parámetro $\sigma = \pm 1$ se introdujo para separar los solitones brillantes y oscuros.

Los elementos deseados de la matriz $\hat{\mathcal{G}}$ (conocidos en la literatura moderna como los elementos AKNS) se pueden construir en la forma $\hat{\mathcal{G}} = \sum_{k=0}^{k=3} G_k \Lambda^k$ con el parámetro espectral variable en el tiempo $\Lambda(T)$ dado por

$$\Lambda_T = \lambda_0(T) + \lambda_1(T)\Lambda(T) \quad (10)$$

donde las funciones dependientes del tiempo $\lambda_0(T)$ y $\lambda_1(T)$ son los coeficientes de expansión de Λ_T en potencias del parámetro espectral $\Lambda(T)$.

Resolviendo el sistema (5-9), se encuentran los elementos A, B, C de la matriz $\hat{\mathcal{G}}$ y dos ecuaciones generales para iQ_T y iR_T .

Al colocar $R = -Q^*$ se genera una reducción, por lo que es fácil encontrar que las ecuaciones de iQ_T y iR_T toman la misma forma si se cumplen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} a_0 &= -a_0^*, \quad a_1 = -a_1^* \\ a_2 &= -a_2^*, \quad a_3 = -a_3^* \\ \Lambda_0 &= \lambda_0^*, \quad \lambda_1 = \lambda_1^* \\ F &= F^* \end{aligned} \quad (11)$$

De acuerdo con las condiciones (11), las funciones imaginarias $a_0(T)$, $a_1(T)$, $a_2(T)$ pueden ser definidas como $a_0(T) = i\gamma_0(T)$, $a_1(T) = iV(T)$, $a_2(T) = -iD_2(T)$. El coeficiente de no linealidad está relacionado con el coeficiente de dispersión: $R_2(T) = F^2 \gamma D_2(T)$ y las funciones $D_2(T)$, $V(T)$, $\gamma_0(T)$ son reales. Los coeficientes $D_2(T)$ y $R_2(T)$ son representados por funciones definidas positivas (para $\sigma = -1$), γ se asume como un número semientero.

Esto permite generar la forma general de la ecuación NLSE con término de ganancia o absorción Γ , con potencial lineal λ_0 y parabólico Ω :

$$i \frac{\partial Q}{\partial T} + \frac{1}{2} D_2(T) \frac{\partial^2 Q}{\partial X^2} + \sigma R_2(T) |Q|^2 Q - 2\lambda_0(T) X Q - \frac{1}{2} \Omega^2(T) X^2 Q = i\Gamma Q \quad (12)$$

Para finalizar, se puede escribir la forma general de la ecuación NLSE con potencial lineal y coeficientes de dispersión y no linealidades dependientes del tiempo.

$$i \frac{\partial Q}{\partial T} + \frac{\sigma}{2} D(T) \frac{\partial^2 Q}{\partial X^2} + R(T) |Q|^2 Q - 2\lambda_0(T) X Q = \quad (13)$$

Por lo tanto, gracias al método ANKS significa que la ecuación es completamente integrable y permite soluciones tipo solitón.

2. SOLUCIONES SOLITÓNICAS MEDIANTE LA TRANSFORMADA DE BÄCKLUND

La transformada de Bäcklund es una herramienta poderosa en la teoría de ecuaciones no lineales que permite construir nuevas soluciones a partir de soluciones conocidas. En el contexto de la ecuación no lineal de Schrödinger (NLSE) con potencial lineal este método proporciona una manera efectiva de generar soluciones solitónicas múltiples, conocidas como *soluciones N-solitónicas*. A continuación, detallamos el procedimiento paso a paso para aplicar este método al sistema estudiado.

2.1. Definición de la transformada de Bäcklund

Sea $\psi(x, t)$ una solución conocida de la NLSE bajo el potencial lineal dado por la ec. (13). La transformada de Bäcklund permite generar una nueva solución $\psi'(x, t)$ a partir de $\psi(x, t)$, con la forma

$$\psi'(x, t) = \psi(x, t) + \Delta\psi(x, t) \quad (14)$$

donde $\Delta\psi(x, t)$ es una corrección que depende de los parámetros del sistema, tales como el potencial lineal, los coeficientes de dispersión, no linealidad y las propiedades de la solución inicial $\psi(x, t)$. Este término de corrección está ligado al pseudopotencial del sistema, el cual desempeña un papel crucial en la evolución de la solución solitónica.

2.2. Ecuaciones de la transformada de Bäcklund

La forma específica de la transformada para la NLSE se obtiene resolviendo las ecuaciones de Bäcklund, que establecen la relación entre la solución original $\psi(x, t)$ y la nueva solución $\psi'(x, t)$. Estas ecuaciones se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \psi'}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + F(\psi, \psi', \lambda) \quad (15)$$

$$\frac{\partial \psi'}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + G(\psi, \psi', \lambda) \quad (16)$$

donde F y G son funciones que dependen de la solución $\psi(x, t)$ y del parámetro espectral λ , que caracteriza la forma de la corrección solitónica. La elección del parámetro λ está relacionada directamente con las propiedades de la nueva solución. Por ejemplo, en el caso de solitones brillantes, λ puede estar asociado con la amplitud y la velocidad del solitón generado.

2.3. Construcción de soluciones solitónicas

Una vez que se han resuelto las ecuaciones de Bäcklund, es posible construir explícitamente las soluciones solitónicas. Para una solución de un solo solitón, la transformada de Bäcklund genera una corrección de la forma:

$$\Delta\psi(x, t) = 2 \frac{\partial}{\partial x} \ln \left(1 + \frac{e^{\theta(x, t)}}{\psi(x, t)} \right) \quad (17)$$

donde $\theta(x, t)$ es una función auxiliar que depende del tiempo y el espacio y que determina el perfil del solitón añadido. Para un solitón brillante, esta función podría tener la forma:

$$\theta(x, t) = \eta_0 x + \kappa_0 t \quad (18)$$

con los parámetros η_0 y κ_0 relacionados con la amplitud y velocidad del solitón.

2.4. Soluciones N-solitónicas

El método de Bäcklund no se limita a generar una solución solitónica individual. Al aplicar de manera iterativa la transformada, es posible obtener soluciones de múltiples solitones (Mendez-Zuñiga *et al.*, 2023). Para generar una solución de dos solitones, se aplica la transformada sobre la solución de un solitón:

$$\Psi_{2soliton}(x, t) = \Psi_{1soliton} + \Delta\Psi_1(x, t) \quad (19)$$

Cada iteración añade un nuevo solitón al sistema, pero respetando la integrabilidad de la ecuación y preservando las propiedades esenciales de la solución original. En particular, las soluciones múltiples muestran interacción elástica, lo que significa que después de colisionar, los solitones conservan su forma y velocidad.

Entonces las soluciones solitónicas de la ec. (13) se pueden obtener aplicando la transformación de Bäcklund (Chen, 1974) y la relación de recurrencia (Rangwala y Rao, 1985; Serkin *et al.*, 2010).

$$Q_n(x, T) = -Q_{n-1}(x, T) - \frac{4\eta_n \widetilde{\Gamma_{n-1}}(x, T)}{1 + |\widetilde{\Gamma_{n-1}}(x, T)|^2} \sqrt{\frac{D(T)}{R(T)}} \exp[-i\Theta x^2/2] \quad (20)$$

Estas soluciones tienen una fase adicional autoinducida (un "chirp"):

$$\varphi(x, T) = \theta(T)x^2/2 + \varphi_0(T=0), \quad (21)$$

donde el perfil autoinducido $\theta(T)$ se genera en concordancia con los coeficientes variables del sistema:

$$\theta(T) = -\frac{W[R(T), D(T)]}{D^2(T)R(T)} \quad (22)$$

y depende del *wronskiano* $W(R, D) = RD'_T - RD'_T$. Para la ecuación (13) los coeficientes están relacionados como:

$$\frac{D(T)}{D_0} = \frac{R(T)}{R_0} \exp\left\{-\frac{\theta_0 D_0}{R_0} \int_0^T R(\tau) d\tau\right\}. \quad (23)$$

La ec. (20) conecta las soluciones para $(n-1)$ y n solitones mediante el llamado *pseudopotencial* $\widetilde{\Gamma_{n-1}}(x, T) = \frac{\psi_1(x, T)}{\psi_2(x, T)}$ para las funciones $\psi(x, T) = (\psi_1, \psi_2)^T$ de dispersión del solitón $(n-1)$.

2. 5. Propiedades de las soluciones generadas

Las soluciones obtenidas mediante la transformada de Bäcklund presentan una serie de características interesantes. Primero, los solitones no autónomos muestran una autoinducción de fase o “chirp”, que es una modulación en su frecuencia debido a la dependencia temporal de los coeficientes del sistema. Esta modulación afecta tanto a la amplitud como a la forma del solitón:

$$\phi(x, T) = \phi_0 e^{i\theta(x, T)} \quad (24)$$

donde $\theta(x, T)$ representa la fase autoinducida.

Además, los solitones exhiben comportamientos adaptativos al potencial lineal y a las variaciones de dispersión y no linealidad ajustando su velocidad y amplitud en función del medio externo.

3. RESULTADOS

Consideramos un ejemplo para analizar las soluciones y demostrar la dinámica de solitones no autónomos con el potencial lineal. Sea que la no linealidad del medio se mantenga constante: $R(T) = R_0 = 1$ y que la dispersión disminuya exponencialmente: $D(T) = D_0 \exp(-c_0 T)$, donde $D_0 = 1$ y una constante $c_0 \ll 1$, además del coeficiente del potencial lineal $\lambda_0(t)$ aceptamos como una constante $\lambda_0 = \text{const}$, elegimos $\sigma = 1$ para obtener las soluciones para los solitones brillantes y, por último, la fase autoinducida de acuerdo con la ec. (16) tiene la forma: $\Theta(T) = \Theta_0 \exp(c_0 T)$, con $\Theta_0 = 1$.

Desarrollando ec.(20), obtenemos las soluciones para ($n = 1$) y solitón:

$$Q_1(x, T) = 2\eta_{01} \sqrt{D_0 \exp(c_0 T)} \text{sech}[\xi_1(x, T)] \exp\left[-\frac{i}{2} \Theta_0 \exp(c_0 T) X^2 - i\chi_1(x, T)\right] \quad (25)$$

La solución para dos solitones ($n = 2$) es la siguiente:

$$Q_2(x, T) = 4 \sqrt{D_0 \exp(-c_0 T)} \frac{N(x, T)}{D(x, T)} \exp\left[-\frac{i}{2} \Theta_0 \exp(c_0 T) X^2\right] \quad (26)$$

Con los argumentos y fases $\xi_i(x, T)$, $\chi_i(x, T)$ que están relacionadas con las amplitudes $\eta_i(T)$ y las velocidades $\kappa_i(T)$, donde κ_{0i} y η_{0i} corresponden a la velocidad inicial y la amplitud del i -ésimo solitón.

$$\begin{aligned} \xi_i(x, T) &= 2\eta_{0i} x \exp(c_0 T) + 4D_0 \eta_{0i} \left\{ \frac{\kappa_{0i}}{c_0} [\exp(c_0 T) - 1] + \frac{\lambda_0}{c_0} \left[\frac{\exp(c_0 T) - 1}{c_0} - T \right] \right\} \\ \chi_i(x, T) &= 2\kappa_{0i} x \exp(c_0 T) + 2D_0 (\kappa_{0i}^2 - \eta_{0i}^2) \frac{\exp(2c_0 T) - 1}{2c_0} + 2x \frac{\lambda_0}{c_0} [\exp(c_0 T) - 1] \\ &\quad + 4D_0 \kappa_{0i} \frac{\lambda_0}{c_0} \left[\frac{\exp(c_0 T) - 1}{c_0} - T \right] + 2D_0 \left(\frac{\lambda_0}{c_0} \right)^2 \left[\frac{\exp(c_0 T) - \exp(-c_0 T)}{c_0} - 2T \right] \left[\frac{\exp(c_0 T) - 1}{c_0} - T \right] \quad (27) \end{aligned}$$

siendo las amplitudes:

$$\eta_i(T) = \frac{D_0 R(T)}{R_0 D(T)} \eta_{0i} \quad (28)$$

y las velocidades:

$$\kappa_i(T) = \frac{D_0 R(T)}{R_0 D(T)} \left[\kappa_{0i} + \frac{R_0}{D_0} \int_0^T \frac{\lambda_0(\tau) D(\tau)}{R(\tau)} d\tau \right] \quad (29)$$

donde κ_{0i} y η_{0i} corresponden a la velocidad inicial y la amplitud del i -ésimo solitón.

Para la solución 2-solitónica ($n = 2$) las magnitudes $\mathbb{N}(X, T)$ y $\mathbb{D}(X, T)$ de la ec. (26) están dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \cosh(\xi_2) \exp(-i\chi_1) [(\kappa_2 - \kappa_1)^2 + 2i\eta_2(\kappa_2 - \kappa_1) \tanh(\xi_2) + \eta_1^2 - \eta_2^2] \\ &\quad \eta_2 \cosh(\xi_1) \exp(-i\chi_2) [(\kappa_2 - \kappa_1)^2 - 2i\eta_1(\kappa_2 - \kappa_1) \tanh(\xi_1) - \eta_1^2 + \eta_2^2], \\ \mathbb{D} &= \cosh(\xi_1 + \xi_2) [(\kappa_2 - \kappa_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2] + \cosh(\xi_1 - \xi_2) [(\kappa_2 - \kappa_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2] \\ &\quad - 4\eta_1\eta_2 \cos(\chi_2 - \chi_1). \end{aligned} \quad (30)$$

La dinámica de los solitones en el potencial lineal se muestra en figuras 1 y 2. La figura 1 muestra la dinámica de un solitón no autónomo que se mueve por una trayectoria parabólica reflejando del potencial lineal. Gracias a la dispersión que disminuye exponencialmente y el cambio de su fase inducido, el solitón tiene la amplitud creciente. En la figura 2 se muestra la interacción de dos solitones que se describe por las fórmulas 25 y 26. La colisión tiene un carácter elástico con el área central de interferencia no lineal, tal que las trayectorias de cada uno de solitones se conservan sus formas parabólicas.

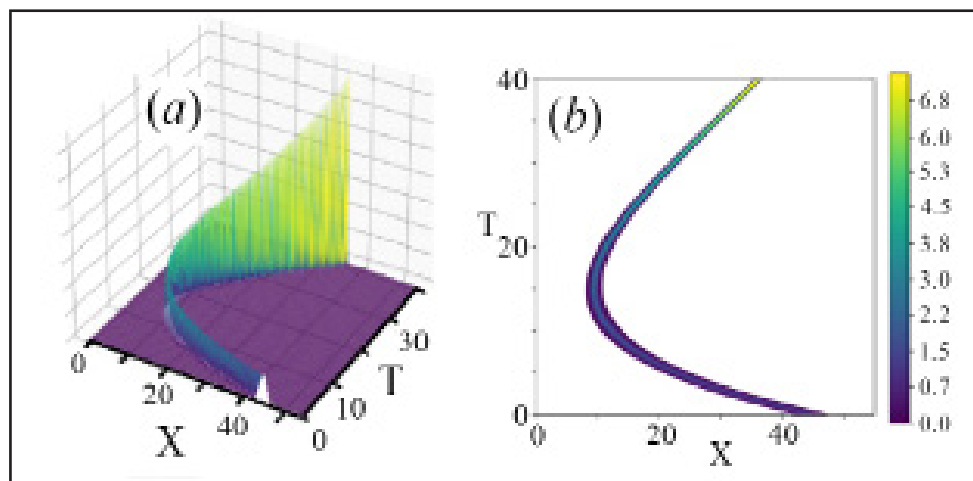


FIGURA 1

Evolución del solitón brillante no autónomo representado por la ecuación (13)*

Nota: *con parámetros del modelo $c_0 = 0.05$, $\lambda_0 = -0.2$, $\eta_{01} = 0.5$, $\kappa_{01} = 3$. La figura *a*) muestra el comportamiento espacio-temporal y la figura *b*) el mapa de contorno correspondiente.

Fuente: elaboración propia.

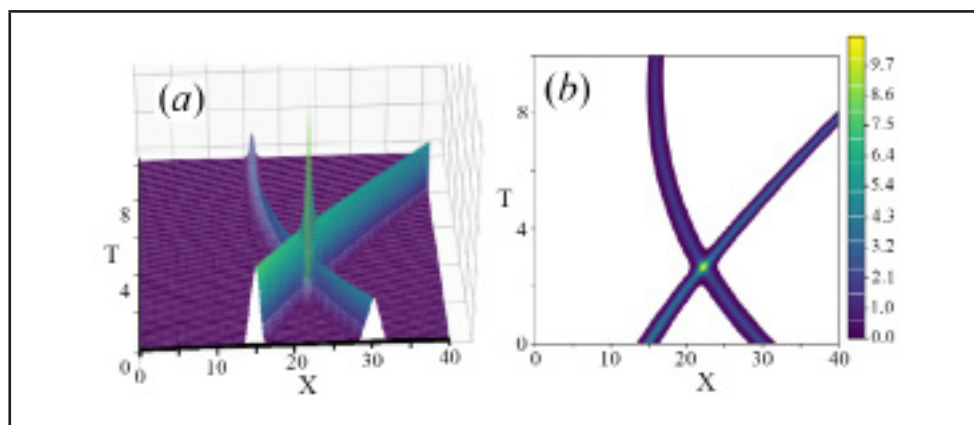


FIGURA 2

Evolución de dos solitones brillantes no autónomos representados por la ec. (13)

Nota: con parámetros del modelo: $*c_0 = 0.05$, $\lambda_0 = -0.2$, $\eta_{01} = 1$, $\eta_{02} = 0.75$, $\kappa_{01} = -1.2$, $\kappa_{02} = 1.8$. La figura *a*) muestra el comportamiento espacio-temporal y la figura *b*) el mapa de contorno correspondiente

Fuente: elaboración propia.

PROSPECTIVA

El estudio de solitones no autónomos y su interacción elástica en sistemas físicos continúa siendo un campo de investigación prometedor en la física no lineal. A medida que avanzamos, hay varias direcciones interesantes que podrían expandir y enriquecer aún más este campo:

- a*) Exploración de nuevos sistemas físicos: aunque hemos abordado el problema de solitones no autónomos en el contexto de la ecuación no lineal de Schrödinger con un potencial lineal, sería fascinante extender este análisis a otros sistemas físicos relevantes. Por ejemplo, investigar cómo se comportan los solitones no autónomos en medios ópticos no lineales con potenciales no lineales o en sistemas de condensados de Bose-Einstein (BEC) con potenciales externos variables en el tiempo podría revelar nuevos fenómenos y aplicaciones.
- b*) Efectos de la dispersión y la no linealidad variable en el tiempo: hasta ahora, hemos considerado coeficientes de dispersión y no linealidades variables en el tiempo de manera independiente. Sin embargo, investigar cómo interactúan estos efectos en la dinámica de los solitones no autónomos podría proporcionar información valiosa sobre la complejidad de estos sistemas. Además, explorar cómo las variaciones temporales en estos coeficientes afectan la estabilidad y la formación de patrones de los solitones sería una línea de investigación fructífera.
- c*) Aplicaciones prácticas: los solitones no autónomos tienen importantes aplicaciones en diversas áreas como la óptica no lineal, la física de la materia condensada y la física de plasma. Investigar cómo estas soluciones pueden ser manipuladas y controladas experimentalmente abriría nuevas oportunidades para el diseño de dispositivos ópticos y sistemas de comunicación avanzados, así como para la comprensión de fenómenos físicos fundamentales en sistemas cuánticos y clásicos.
- d*) Desarrollo de métodos analíticos y numéricos: aunque hemos presentado un marco teórico para la obtención de soluciones exactas de la ecuación no lineal de Schrödinger con potencial lineal, el desarrollo de nuevos métodos analíticos y numéricos para el estudio de solitones no autónomos seguirá siendo una tarea imprescindible. Esto incluye la exploración de técnicas de simulación avanzadas, así como el desarrollo de aproximaciones analíticas para comprender mejor el comportamiento de estos sistemas en diferentes regímenes.

En resumen, el estudio de solitones no autónomos en sistemas físicos con potenciales variables en el tiempo ofrece un amplio campo de investigación con numerosas posibilidades para descubrimientos emocionantes y aplicaciones prácticas. A medida que continuamos avanzando en esta dirección, es posible esperar una mayor comprensión de la complejidad y la riqueza de los fenómenos no lineales en la naturaleza.

CONCLUSIONES

El método de dispersión inversa a través de los pares de Lax y de la jerarquía AKNS proporciona una gran herramienta para establecer la integrabilidad de muchas ecuaciones no lineales de evolución como lo es la NLSE con potencial lineal. Además, nos asegura que dichas ecuaciones tienen soluciones tipo solitón. Gracias a la generalización del método AKNS para los parámetros del sistema que dependen de tiempo, hemos analizado analíticamente una nueva clase de soluciones: solitones no autónomos. Hemos demostrado la dinámica de solitones no autónomos tomando como un ejemplo el modelo de la NLSE con el potencial lineal. Concluimos que esta nueva clase de soluciones amplían sustancialmente el concepto de solitones clásicas generalizando los a solitones no autónomos que interactúan elásticamente y que se mueven con amplitudes, velocidades y espectros variables y adaptados tanto al potencial externo y las variaciones de dispersión y no linealidad.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a los árbitros por sus críticas muy constructivas a la versión original de este artículo. Este trabajo fue apoyado en parte por fondos del Proyecto de Investigación CIB SIEA-UAEMEX 7036/2024.

REFERENCIAS

- Ablowitz, M., & Segur, H. (1981). *Solitons and the Inverse Scattering Transform*. Philadelphia, PA: SIAM.
- Ablowitz, M. J., Kaup, D. J., Newell, A. C., & Segur, H. (1973). Nonlinear-Evolution Equations of Physical Significance. *Physical Review Letters*, 31, 125.
- Agrawal, G. P. (2001). *Nonlinear Fiber Optics* (3rd ed.). San Diego, CA: Academic Press.
- Agüero Granados, M. A., y Serkin, V. N. (2020). *Introducción a la teoría de solitones*. Ediciones y Gráficos Eón, S.A. de C.V.
- Belyaeva, T. L., Agüero, M. A., & Serkin, V. N. (2021). Nonautonomous solitons of the novel nonlinear Schrödinger equation: Self-compression, amplification, and the bound state decay in external potentials. *Optik*, 244. <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2021.167584>
- Belyaeva, T. L., & Serkin, V. N. (2011). Nonautonomous Solitons: Applications from nonlinear optics to BEC and hydrodynamics. In H. Edmar Schulz, A. L. Andrade Simoes, R. Lobosco (Eds.), *Hydrodynamics - Advanced Topics*. <https://doi.org/10.5772/26463>
- Chen, H. H. (1974). General Derivation of Bäcklund Transformations from Inverse Scattering Problems. *Physical Review Letters*, 33, 925.
- Chen, H. H., & Liu, C. S. (1976). Solitons in nonuniform media. *Physical Review Letters*, 37, 693.
- Gardner, C. S., Greene, J. M., Kruskal, M. D., & Miura, R. M. (1967). Method for solving the Korteweg-de Vries equation. *Physical Review Letters*, 19, 1095.
- Hasegawa, A., & Kodama, Y. (1995). *Solitons in Optical Communications*. New York: Oxford University Press.

- Mendez-Zuñiga, I. M., Belyaeva, T. L., Agüero, M. A., Serkin, V. N. (2023). Emergence of polynomial external potentials in solitonic hierarchies: Applications to the nonisospectral LPDE model. *Optik*, 287. <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2023.170904>
- Lax, P. D. (1968). Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 21, 467.
- Rangwala, A. A., & Rao, J. A. (1985). Complete soliton solutions of the ZS / AKNS equations of the Inverse Scattering Method. *Physical Review Letters*, 112(5), 188-192.
- Serkin, V. N., & Hasegawa, A. (2000). Novel soliton solutions of the nonlinear Schrödinger equation model. *Physical Review Letters*, 85, 4502.
- Serkin, V. N., Hasegawa, A., & Belyaeva, T. L. (2007). Nonautonomous solitons in external potentials. *Physical Review Letters*, 98, 074102.
- Serkin, V. N., Hasegawa, A., & Belyaeva, T. L. (2010). Solitary waves in nonautonomous nonlinear and dispersive systems: nonautonomous solitons. *Journal of Modern Optics*, 57, 1456–1472.
- Taylor, J. R. (1992). *Optical Solitons—Theory and Experiment*. Cambridge: Cambridge University Press.

CC BY-NC-ND



Disponible en: <https://cienciaergosum.uaemex.mx/article/view/24297>

Cómo citar el artículo:

Méndez Zúñiga, F. E., Agüero Granados, M. A. y Leonidovna Belyaeva, T. (2026). Solitones no autónomos de la ecuación no lineal de Schrödinger con potencial lineal. *CIENCIA ergo-sum*, 33. <https://doi.org/10.30878/ces.v33n0a50>

DOI: <https://doi.org/10.30878/ces.v33n0a50>



Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivar 4.0 Internacional.

Declaración de autoría (CRediT):

Félix Enrique Méndez Zúñiga: conceptualización, supervisión, redacción-revisión y edición.

Máximo Augusto Agüero Granados: curación de datos.
Tatyana Leonidovna Belyaeva: validación y redacción-borrador original.