



Aproximación adiabática para la interacción de dos solitones con ganancias y pérdidas

Maguiña Palma, Misael Erikson; Agüero Granados, Máximo Augusto; Leonidovna Belyaeva, Tatyana; Serkin Nikolaevich, Vladimir

Aproximación adiabática para la interacción de dos solitones con ganancias y pérdidas

CIENCIA *ergo-sum*, Número especial "Retos de la física no lineal" 2020 | e102

Universidad Autónoma del Estado de México, México

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivar 4.0 Internacional.

Maguiña Palma, M. E., Agüero Granados, M. A., Leonidovna Belyaeva, T. y Serkin Nikolaevich, V. (2020). Aproximación adiabática para la interacción de dos solitones con ganancias y pérdidas. CIENCIA *ergo-sum*, Número especial "Retos de la física no lineal".

Aproximación adiabática para la interacción de dos solitones con ganancias y pérdidas

Adiabatic approach for the interaction of two solitones with gain and losses

Misael Erikson Maguiña Palma
 Universidad Autónoma del Estado de México, México
 mmaguia@hotmail.com
 <http://orcid.org/0000-0002-4545-7413>

Recepción: 28 de mayo de 2019
 Aprobación: 13 de enero de 2020

Máximo Augusto Agüero Granados
 Universidad Autónoma del Estado de México, México
 makxim@gmail.com
 <http://orcid.org/0000-0002-9861-8997>

Tatyana Leonidovna Belyaeva
 Universidad Autónoma del Estado de México, México
 tbl@uaemex.mx
 <http://orcid.org/0000-0002-6960-3841>

Vladimir Serkin Nikolaevich
 Benemérita Universidad de Puebla, México
 vsarkin@yahoo.com
 <http://orcid.org/0000-0002-2450-9499>

RESUMEN

Se estudia la interacción de solitones de la ecuación diferencial no lineal de Schrödinger basada en la aproximación adiabática para los parámetros del sistema. Se analiza la dinámica de dos solitones con ganancia y pérdida en amplificación. Si la perturbación no está presente, la interacción de solitones en fase es atractiva y forma un estado ligado. Si los solitones están en fase con ganancia en amplificación, la amplitud crece, pero el periodo de oscilación del estado ligado y la distancia relativa entre los solitones disminuye. Para el caso de pérdida en amplificación, la amplitud decrece y los solitones comienzan a repelerse y por consiguiente, el periodo de oscilaciones y la distancia relativa entre solitones se incrementan.

PALABRA CLAVE: teoría de la perturbación para solitones, aproximación adiabática, interacción de solitones con absorción y amplificación.

ABSTRACT

The interaction of soliton solutions of the Nonlinear Schrödinger Equation is studied based on the adiabatic approach for the system parameters. The dynamics of two solitons with gain and loss in amplification is analyzed. If the perturbation is not present, the in-phase soliton interaction is attractive and forms a bound state. While the solitons are in phase with gain in amplification, their amplitudes increase; but the period of oscillation of the bound state and the relative distance between the solitons decrease. For the case of loss in amplification, the amplitude decreases and the solitons begin to repel, consequently, the period of oscillations and the relative distance between solitons increase.

KEYWORDS: Perturbation theory for solitons, adiabatic approximation, soliton interaction with absorption and amplification.

INTRODUCCIÓN

La ecuación no lineal de Schrödinger (Nonlinear Schrödinger Equation-NLSE) es una de las más importantes e interesantes en el estudio de la física no lineal. Posee soluciones localizadas y coherentes conocidas como *solitones*

que aparecen con el equilibrio entre el efecto de la no linealidad y la dispersión y también características similares a una partícula, pues conserva su estructura (formas y velocidad) después de interactuar. La NLSE aparece en muchas áreas de la física como la hidrodinámica, acústica, termodinámica, físicas de plasmas, etc. (Bullough y Caudrey, 1980; Hasegawa y Kodama, 1995; Christiansen, Sorensen y Scott, 2000; Fujioka, 2003). En un sistema perturbado los solitones pueden no propagarse de forma estacionaria, pero pueden distorsionarse durante el tiempo. La teoría de perturbación para solitones en la NLSE fue estudiada por Karpman y Maslov (1977), basada en la transformación de dispersión inversa (Inverse Scattering Transform-IST), de Zakharov y Shabat (1972), con un parámetro espectral variable. También se aplicó al problema de interacción del solitón por Karpman y Solov'ev (1981). El método desarrollado trata la perturbación de los datos de dispersión en el problema IST para la NLSE. Debido a la dependencia temporal del parámetro espectral, los parámetros del solitón son dependientes del tiempo (en aplicaciones ópticas, que van variando a lo largo de su propagación). Karpman, Maslov y Solov'ev pudieron derivar el sistema de ecuaciones para todos los parámetros de solitones mediante la aproximación adiabática. El progreso de la teoría de perturbación para solitones ha sido proporcionado y estimulado por conceptos generales de control de la transmisión de solitón administradas por dispersión (Gordon, 1983; Agrawal, 1989; Taylor, 1992; Biswas, Milovic y Edwards, 2010). Es necesario resaltar que los modelos NLSE generalizados, en muchos casos, han estado ligados a conceptos de solitones no autónomos (Serkin y Hasegawa, 2000; Serkin y Hasegawa, 2002; Serkin, Hasegawa y Belyaeva, 2007). En este trabajo estudiaremos la interacción de dos solitones en sistemas con ganancias y pérdidas usando la teoría de perturbación del solitón de Karpman, Maslov y Solov'ev.

1. ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER NO LINEAL

Consideramos la NLSE perturbada (Karpman y Maslov, 1977):

$$iu_t + \frac{1}{2} u_{xx} + |u|^2 u = i\varepsilon(u) \quad (1)$$

La ecuación (1) es la base de este trabajo, cuyo primer término nos indica la evolución temporal. El segundo toma en cuenta el fenómeno de difracción, mientras que el último caracteriza la no linealidad y $\varepsilon(u)$ es un término pequeño, considerado como la perturbación. La solución se busca en la forma (Karpman y Maslov, 1977; Hernandez Tenorio *et al.*, 2005; Yang, 2010):

$$u(x, t) = \eta(t) \operatorname{sech}\{\eta(t)[x - q(t)]\} \exp[i\varphi(t) - i\delta(t)x] \quad (2)$$

que tiene cuatro parámetros ajustables: $\eta(t)$ la amplitud, $q(t)$ la posición del centro de masa, $\varphi(t)$ la fase, y $\delta(t)$ la velocidad del solitón. En presencia de perturbaciones, los parámetros del solitón varían lentamente con el tiempo causando modificaciones en su forma y velocidad.

2. APROXIMACIÓN ADIABÁTICA Y FUERZA DE INTERACCIÓN ENTRE SOLITONES

La aproximación adiabática fue desarrollada inicialmente en los años setenta en trabajos de Karpman y Maslov (1977) y Karpman y Solov'ev (1981) y representa uno de los enfoques más universales para encontrar soluciones tipo solitones para los sistemas no lineales perturbados. La idea original de Karpman y Solov'ev consideraba la interacción entre solitones como una deformación lenta de los parámetros (amplitud, posición, fase y velocidad). Basada en la teoría de dispersión inversa, ellos encontraron la dependencia temporal de los parámetros de la ecuación (2), considerando:

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{\eta} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(u) u^* (z) dz, \quad (3)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{1}{\eta} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(u) \tanh z u^* (z) dz, \quad (4)$$

$$\frac{dq}{dt} = -\delta + \frac{1}{\eta^3} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(u) z u^* (z) dz, \quad (5)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\eta^2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(u) [1 - z * \tanh z] u^* (z) dz + \frac{1}{2} (\eta^2 - \delta^2) + q \frac{d\delta}{dt}, \quad (6)$$

donde

$$z = \eta(t)[x - q(t)].$$

Para estudiar la interacción de solitones se puede buscar la solución de la ecuación (1), como la superposición lineal de dos solitones individuales que representan la propagación de ondas, así la derecha e izquierda respectivamente:

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) \quad (7)$$

Con solución para cada solitón expresada por:

$$u_{1,2}(x, t) = \eta_{1,2}(t) \operatorname{sech}\{\eta_{1,2}(t)[x - q_{1,2}(t)]\} \exp[i\varphi_{1,2}(t) - i\delta_{1,2}(t)x] \quad (8)$$

Al sustituir ecuación (7) en la ecuación (1) obtenemos el sistema para dos NLSE perturbadas:

$$i \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + |u_1|^2 u_1 = i\epsilon(u_1) - 2|u_1|^2 u_2 - u_1^2 u_2^* \quad (9)$$

$$i \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + |u_2|^2 u_2 = i\epsilon(u_2) - 2|u_2|^2 u_1 - u_2^2 u_1^* \quad (10)$$

donde los términos en el lado derecho describen la interacción no lineal de dos solitones.

3. CONDICIONES DE INTERACCIÓN PARA DOS SOLITONES

Para el estudio introducimos el parámetro de separación de solitones $q = \frac{1}{2}(q_2 - q_1)$. Su amplitud promedio $\eta = \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2)$, diferencias de amplitudes $\Delta\eta = \eta_2 - \eta_1$, velocidades $\delta = \delta_2 - \delta_1$ y fases $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Suponemos que los solitones tienen una separación bastante pequeña ($q_2 > q_1$) y tienen aproximadamente las mismas velocidades y amplitudes.

$$|\Delta\eta q| \ll 1 \ll \eta q, \quad |\varphi q| \ll 1 \quad (11)$$

Considerando en las ecuaciones (9), (10) y $i\epsilon(u) = i\gamma u$, obtenemos la perturbación completa en la NLSE.

$$\epsilon(u_m)u_m^* = (\gamma + i2u_m^* u_n + iu_m u_n^*)|u_m|^2 \quad (12)$$

donde $m, n = 1, 2 \quad m \neq n$.

De las ecuaciones (8), (12) al sistema de ecuaciones (3-6), obtenemos el sistema de ecuaciones para cada solitón:

$$\frac{d\eta_k}{dt} = \frac{1}{\eta} \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(u_k)u_k^* dz = 2\gamma\eta + (-1)^k 4\eta^3 \exp(-2\eta q) \sin \varphi, \quad (13)$$

$$\frac{d\delta_k}{dt} = -\frac{1}{\eta} \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(u_k) \tanh z u_k^* dz = (-1)^k 4\eta^3 \exp(-2\eta q) \cos \varphi, \quad (14)$$

$$\frac{dq_k}{dt} = -\delta_k + \frac{1}{\eta^3} \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(u_k) z u_k^* dz = -\delta_k - 2\eta \exp(-2\eta q) \sin \varphi, \quad (15)$$

$$\frac{d\varphi_k}{dt} = 6\eta^2 \exp(-2\eta q) \cos \varphi + 2\eta\delta_k \exp(-2\eta q) \sin \varphi + \frac{1}{2}(\eta_k^2 + \delta_k^2), \quad (16)$$

donde $k = 1, 2..$

Usando las ecuaciones (13)-(16), obtenemos el sistema de ecuaciones para la diferencia de los parámetros de solitones:

$$\frac{d\Delta\eta}{dt} = 2\gamma\Delta\eta + 8\eta^3 \exp(-2\eta q) \sin \varphi, \quad (17)$$

$$\frac{d\Delta\delta}{dt} = 8\eta^3 \exp(-2\eta q) \cos \varphi, \quad (18)$$

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{2} \Delta\delta, \quad (19)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \eta\Delta\eta \quad (20)$$

De las ecuaciones (17-20), en particular, sigue que:

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Delta\delta = -4\eta^3 \exp(-2\eta q) \cos \varphi, \quad (21)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \eta\Delta\eta = 2\gamma\Delta\eta + 8\eta^4 \exp(-2\eta q) \sin \varphi, \quad (22)$$

Considerando a lo que plantea Karpman y Solov'ev (1981), definimos una función compleja $Y = \Delta\delta + i\Delta\eta$, para la cual se puede obtener la ecuación:

$$\frac{dY}{dt} = \frac{d\Delta\delta}{dt} + i \frac{d\Delta\eta}{dt} = i2\gamma\Delta\eta + 8\eta^3 \exp(-2\eta q + i\varphi), \quad (23)$$

Realizando la diferenciación de ecuación (23) respecto al tiempo, obtenemos:

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = i2\gamma \frac{d\Delta\eta}{dt} + 8\eta^3 \exp(-2\eta q + i\varphi) \left(-2q \frac{d\eta}{dt} + \eta Y \right) + 24 \exp(-2\eta q + i\varphi) \eta^2 \frac{d\eta}{dt}, \quad (24)$$

donde

$$\frac{d(-2\eta q + i\varphi)}{dt} = -2q \frac{d\eta}{dt} + \eta Y.$$

Finalmente obtenemos:

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = i2\gamma \frac{d\Delta\eta}{dt} + 8\eta^3 \exp(-2\eta q + i\varphi) \left(-2q \frac{d\eta}{dt} + \eta Y \right) + 24 \exp(-2\eta q + i\varphi) \eta^2 \frac{d\eta}{dt}, \quad (25)$$

Resulta complicada resolver la ecuación (25) aplicando una serie de simplificaciones basadas en las aproximaciones definidas en la ecuación (11). Considerando a $\gamma = cte.$ y $\frac{d\eta}{dt} \approx 2\gamma\eta$ tomando en consideración que $\gamma \ll 1$, reducimos la ecuación (25) a la forma más simple:

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = \frac{1}{2} \eta(t) \frac{dY^2}{dt^2} \quad (26)$$

4. EL CASO SIN GANANCIA DE AMPLIFICACIÓN

Considerando el caso cuando $\gamma = 0$ y $\eta(t) = \eta$ es una constante, la ecuación (26) se puede integrar (Karpman y Solov'ev, 1981; Maguiña-Palma *et al.*, 2019):

$$\frac{dY}{dt} = \frac{1}{2} \eta(Y^2 - C^2) \quad (27)$$

Obteniendo

$$Y = -C \tanh \left(\frac{1}{2} \eta C t + \infty \right), \quad (28)$$

donde $C = C_1 + iC_2$ y $\infty = \infty_1 + i \infty_2$ son constantes complejas.

Usando la ecuación (28), se determinó la siguiente constante de movimiento usando $Y = \Delta\delta + i\Delta\eta$ (Anderson y Lisak, 1986; Karpman y Solov'ev, 1981).

$$C^2 = Y^2 - 16\eta^2 \exp(-2\eta q + i\varphi) \quad (29)$$

Podemos obtener las fórmulas diferencias de velocidad y amplitud de solitones:

$$\Delta\delta = \frac{-C_1 \sinh(\eta C_1 t + 2 \infty_1) + C_2 \sin(\eta C_2 t + 2 \infty_2)}{\cosh(\eta C_1 t + 2 \infty_1) + \cos(\eta C_2 t + 2 \infty_2)} \quad (30)$$

$$\Delta\eta = \frac{-C_2 \sinh(\eta C_1 t + 2 \alpha_1) - C_1 \sin(\eta C_2 t + 2 \alpha_2)}{\cosh(\eta C_1 t + 2 \alpha_1) + \cos(\eta C_2 t + 2 \alpha_2)} \tag{31}$$

Usando las ecuaciones (19) y (20), obtenemos las ecuaciones para la distancia y la diferencia de fases de los dos solitones:

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{2} \Delta\delta = \frac{1}{2} \frac{C_1 \sinh(\eta C_1 t + 2 \alpha_1) - C_2 \sin(\eta C_2 t + 2 \alpha_2)}{\cosh(\eta C_1 t + 2 \alpha_1) + \cos(\eta C_2 t + 2 \alpha_2)}, \tag{32}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \eta \Delta\eta = \eta \frac{-C_2 \sinh(\eta C_1 t + 2 \alpha_1) - C_1 \sin(\eta C_2 t + 2 \alpha_2)}{\cosh(\eta C_1 t + 2 \alpha_1) + \cos(\eta C_2 t + 2 \alpha_2)} \tag{33}$$

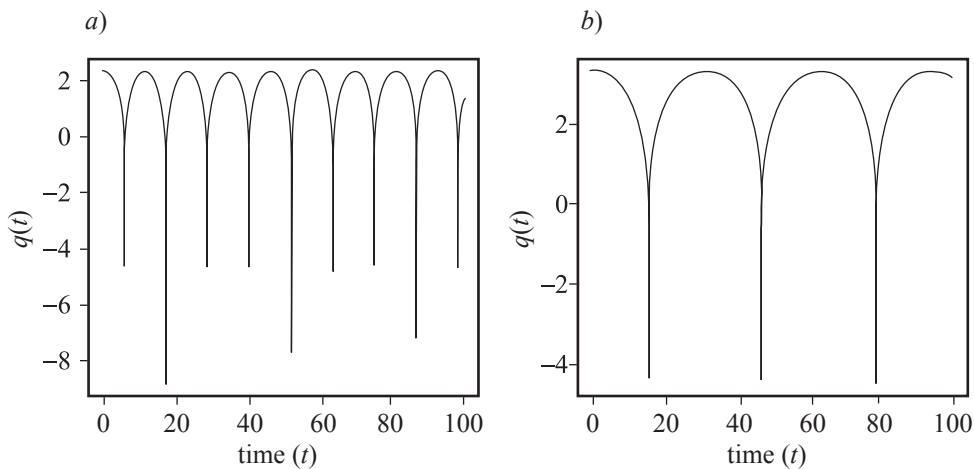
Integrando la ecuación (32), resulta en:

$$q(t) = q(t = 0) + \frac{1}{2\eta} \ln \left[\frac{\cosh(\eta C_1 t + 2 \alpha_1) - \cos(\eta C_2 t + 2 \alpha_2)}{\cosh(\eta C_1 t + 2 \alpha_1) + \cos(\eta C_2 t + 2 \alpha_2)} \right] \tag{34}$$

De las ecuaciones (28) y (29) en $t = 0$, se pueden obtener las constantes de integración, considerando las condiciones iniciales: $\eta = \eta_1 = \eta_2$, $\Delta\delta_0 = 0$, $\Delta\eta_0 = 0$ y $\varphi = \varphi_0$.

Vamos a considerar la dependencia de las distancias entre dos solitones. Para la interacción de solitones que estuvieron inicialmente en fase ($\varphi = 0$), la distancia de separación es

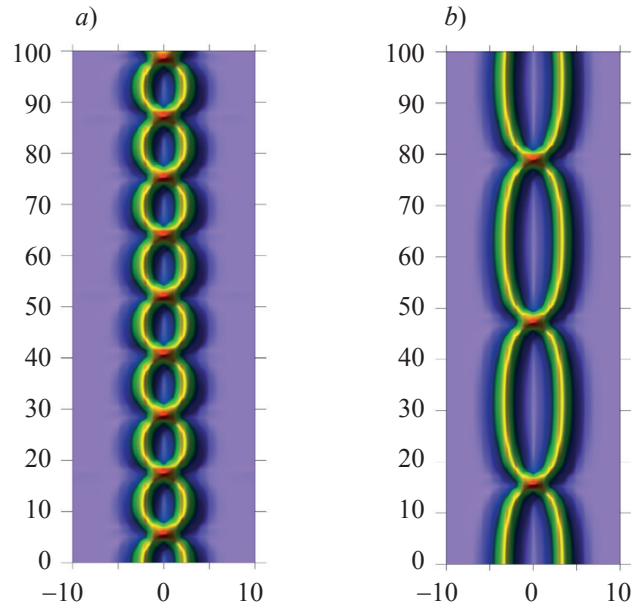
$$q(t) = q_0 + \frac{1}{2\eta} \ln \{ \cos[2\eta^2 t \exp(-\eta q_0)] \}, \tag{35}$$



GRÁFICA 1

Separación relativa de solitones en fase $q(t)$ dada por la ecuación (35) representado con la dinámica espacio-temporal del par de solitones NLSE y considerando $\gamma = 0$, las amplitudes iguales $\eta = 1$ y las velocidades zeros. Las separaciones iniciales a) $q_0 = 2$ y b) $q_0 = 3$.

Fuente: elaboración propia.



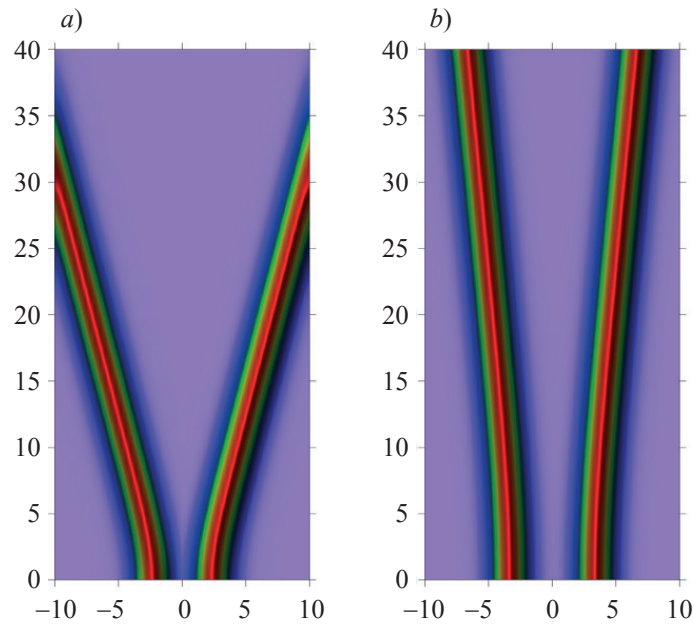
GRÁFICA 2

Dinámica de interacción de dos solitones en fase ecuación (35), con $\gamma = 0$, las amplitudes iguales $\eta = 1$ y las velocidades ceros. La separación inicial a) $q_0 = 2$ y b) $q_0 = 3$.

Fuente: elaboración propia.

Para la interacción de solitones que estuvieron inicialmente fuera de fase ($\varphi = \pi$), la distancia de separación resulta:

$$q(t) = q_0 + \frac{1}{2\eta} \ln \{ \cosh[2\eta^2 t \exp(-\eta q_0)] \}, \tag{36}$$



GRÁFICA 3

Dinámica de interacción de dos solitones fuera de fase ecuación (35), con $\gamma = 0$, las amplitudes iguales $\eta = 1$ y las velocidades ceros. La separación inicial a) $q_0 = 2$ y b) $q_0 = 3$.

Fuente: elaboración propia.

La separación relativa $q(t)$ ($q(t) \geq 0$ es positiva por definición y se vuelve negativa en las zonas de unión como se muestra en la gráfica 1 (a) y (b), donde obviamente la relación $q(t) \geq 0$ no funciona. Los solitones cuando están en fase forman un estado ligado periódico. En el caso cuando la separación inicial es pequeña, los solitones colisionan en periodo muy corto (gráfica 2). Cuando los solitones están fuera de fase no se forma el estado ligado cuando $\gamma = 0$ (gráfica 3).

5. EL CASO CON GANANCIA DE AMPLIFICACIÓN

Usando la ecuación (26) con perturbación, ahora necesitamos considerar la dependencia con el tiempo que aceptamos como $\eta = \eta_0 \exp(2\gamma t)$. Se puede ver que la integración resulta en (Maguiña-Palma *et al.*, 2019):

$$\frac{dY}{dt} = \frac{1}{2} \eta Y^2 - K^2 \approx \frac{1}{2} \eta \left[Y^2 - \frac{2}{\eta_0} K^2 \right], \quad (37)$$

donde K es una constante compleja, $K = K_1 + iK_2$. La ecuación (37) nos permite obtener la solución:

$$Y = -K \sqrt{\frac{2}{\eta_0}} \tanh \left[\frac{K}{\sqrt{2\eta_0}} + \infty \right], \quad (38)$$

donde ∞ es una constante de integración, $\infty = \infty_1 + i \infty_2$.

Usando la definición de la función $Y = \Delta\delta + i\Delta\eta$ y ecuación (38), podemos obtener las fórmulas para diferencias de velocidades y amplitudes de solitones:

$$\Delta\delta = -\sqrt{\frac{2}{\eta_0}} \frac{K_1 \sinh 2\vartheta_1 - K_2 \sin 2\vartheta_2}{\cosh 2\vartheta_1 + \cos 2\vartheta_2} \quad (39)$$

$$\Delta\eta = -\sqrt{\frac{2}{\eta_0}} \frac{K_1 \sinh 2\vartheta_1 + K_2 \sin 2\vartheta_2}{\cosh 2\vartheta_1 + \cos 2\vartheta_2} \quad (40)$$

donde se usó la notación:

$$\vartheta_i = \frac{K_i}{2\gamma} \sqrt{\frac{\eta_0}{2}} (\exp(2\gamma t) - 1) + \infty_i \quad (41)$$

Se puede generalizar como para $i = 1, 2$.

$$\vartheta_i = \frac{K_i}{2\gamma \sqrt{2\eta_0}} [\eta(t) - \eta_0] + \infty_i \quad (42)$$

Usando la ecuación (19), escribimos la ecuación para la distancia entre solitones:

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{2} \Delta\delta = \frac{1}{\sqrt{2\eta_0}} \frac{K_1 \sinh 2\theta_1 + K_2 \sin 2\theta_2}{\cosh 2\theta_1 + \cos 2\theta_2} \quad (43)$$

Realizando la integración, obtenemos:

$$q(t) = q_0 + \frac{1}{2\eta(t)} \ln \left\{ \frac{\cosh 2 \left[K_1 \frac{(\eta(t) - \eta_0)}{2\gamma\sqrt{2\eta_0}} + \alpha_1 \right] + \cos 2 \left[K_2 \frac{(\eta(t) - \eta_0)}{2\gamma\sqrt{2\eta_0}} + \alpha_2 \right]}{\cosh (2 \alpha_1) + \cos (2 \alpha_2)} \right\} \quad (44)$$

De las ecuaciones (23), (29) y (38) obtenemos:

$$8\eta^2\eta_0 \exp(-2\eta q + i\varphi) + i2\gamma\eta_0\Delta\eta = -K^2 \operatorname{sech}^2(\theta_1 + i\theta_2) \quad (45)$$

Los cuatro parámetros reales K_1 , K_2 , η_0 , α_1 y α_2 se determinan a partir de los valores iniciales de $\Delta\delta$, $\Delta\eta$, q y φ a través de las ecuaciones (29-32) y (38) en $t = 0$, es decir:

$$\Delta\delta_0 + i\Delta\eta_0 = -(K_1 + iK_2) \sqrt{\frac{2}{\eta_0}} \tanh\{\alpha_1 + i\alpha_2\}, \quad (46)$$

$$K = \pm i \sqrt{8\eta_0^3 \exp(-2\eta_0 q_0 + i\varphi_0) + i2\gamma\eta_0\Delta\eta_0} \cosh \alpha. \quad (47)$$

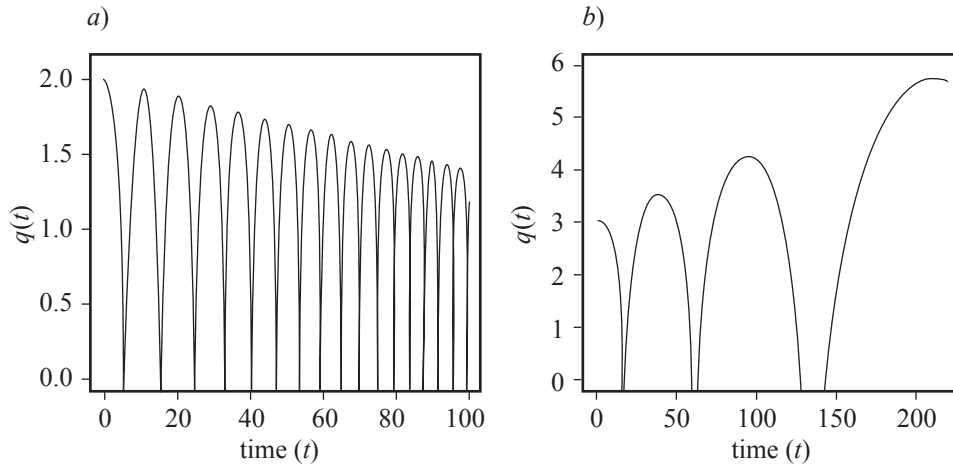
Vamos a estudiar el caso particular correspondiente a las condiciones iniciales: $\eta_1 = \eta_2$, $\Delta\delta_0 = 0$, $\Delta\eta_0 = 0$ y $\varphi = \varphi_0$. Para dos solitones que inicialmente está en fase ($\varphi = 0$), la distancia entre dos solitones resulta:

$$q(t) = q_0 + \frac{1}{\eta} \ln \left\{ \cos \left[\eta_0 \exp(-\eta_0 q_0) \frac{(\eta - \eta_0)}{\gamma} \right] \right\}, \quad (48)$$

Si los solitones están inicialmente fuera de fase ($\varphi = \pi$), obtenemos la distancia entre dos solitones:

$$q(t) = q_0 + \frac{1}{\eta} \ln \left\{ \cosh \left[\eta_0 \exp(-\eta_0 q_0) \frac{(\eta - \eta_0)}{\gamma} \right] \right\}, \quad (49)$$

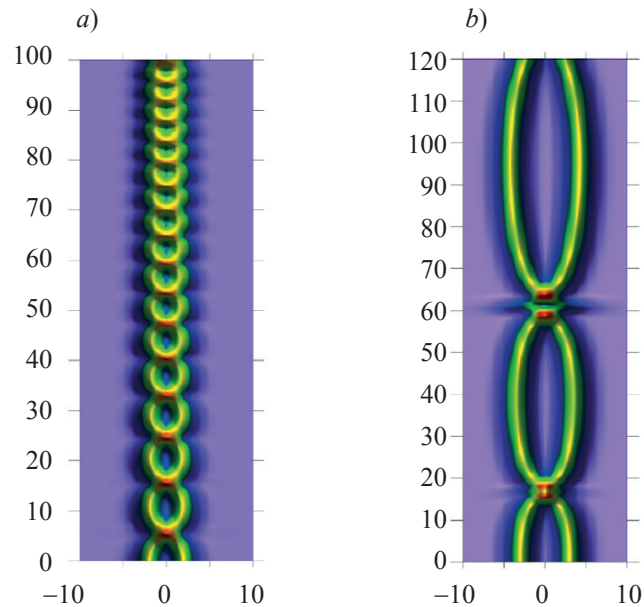
Los solitones cuando están en fase forman un estado ligado periódico; en el caso de que la separación inicial sea pequeña los solitones colisionan en periodo muy corto (gráfica 5). Las pérdidas ($\gamma < 0$) o ganancias ($\gamma > 0$) aumentan o disminuyen el periodo de la oscilación del par de solitones. Dos solitones se repelen o atraen entre sí, y la separación relativa de solitones $q(t)$ aumenta en ($\gamma < 0$) o disminuye en ($\gamma > 0$) cómo se muestra en la gráfica 4.



GRÁFICA 4

Impacto de las ganancias y pérdidas en las interacciones de los solitones de la NLSE en fase ecuación (48), con amplitudes iguales $\eta = 1$ y las velocidades ceros después de elegir la separación relativa de solitones a) $q_0 = 2$ y ganancia $\gamma = 0.003$, b) $q_0 = 3$ y pérdida $\gamma = 0.0022$.

Fuente: elaboración propia.



GRÁFICA 5

Dinámica de interacción de dos solitones en fase con amplitudes iguales $\eta = 1$ y las velocidades ceros. La separación inicial a) $q_0 = 2, \gamma = 0.003$ y b) $q_0 = 3, \gamma = -0.0022$.

Fuente: elaboración propia.

CONCLUSIONES Y PROSPECTIVA

En el presente artículo se reporta la investigación de la dinámica de Interacción de los solitones perturbados de la NLSE usando la aproximación adiabática de los parámetros para las perturbaciones de absorción y amplificación. Sin perturbación la interacción de solitones en fase es atractiva y puede resultarse en formación de un estado ligado de dos solitones. Esta solución tiene comportamiento periódico con oscilaciones de la amplitud y

los puntos de colisión. El análisis cualitativo de los resultados obtenidos mostró que el impacto de absorción a la dinámica de solitones en fase resulta en los siguientes efectos: la amplitud de la solución periódica se reduce y los solitones inician a repulsarse, por eso el periodo de oscilaciones de la pareja solitónica y la distancia relativa entre solitones aumentan. En el caso de amplificación, la amplitud es creciente y los solitones se atraen, lo cual resulta en que el periodo de oscilaciones de la pareja solitónica y la distancia relativa entre solitones disminuye. En el caso de solitones fuera de fase la interacción es repulsiva, por eso el estado ligado no se forma.

En prospectiva podemos mencionar que la NLSE se puede aplicar a diversas áreas de la física (óptica, termodinámica, física de plasmas, etcétera) (Taylor, 1992), cuyas soluciones solitónicas han cobrado mucha importancia por sus aplicaciones tecnológicas (principalmente en las telecomunicaciones) (Agrawal, 1989; Hasegawa y Kodama, 1995), así como en investigaciones biológicas (biosolitones) que tiene aplicaciones en las ondas neuronales y el ADN (Peyrard y Bishop, 1989). Los resultados obtenidos en esta investigación son de mucho interés físico en general y abre la posibilidad para desarrollar investigaciones con experimentos reales y computacionales para poder realizar la comparación cualitativa y cuantitativa de los resultados que podrían inferir en el desarrollo de nueva tecnología; asimismo, nos da la posibilidad para ampliar la investigación analítica y computacional para la ecuación general no lineal de Schrödinger con perturbación de ganancia y pérdida.

REFERENCIAS

- Agrawal, G. (1989). *Nonlinear Fiber Optics*. San Diego: Academic Press.
- Anderson, D., & M. Lisak. (1986). Bandwidth limits due to mutual pulse interaction in optical soliton communication systems. *Opt. Lett.*, 11, 174-176.
- Biswas, A., Milovic, D., & Edwards, M. (2010). *Mathematical theory of dispersion-managed optical solitons*. Berlin: Springer Science & Business Media.
- Bullough, R., & Caudrey, P. J. (1980). *Solitons*. Berlin: Springer-Verlag.
- Christiansen, P. L., Sorensen, M. P., & Scott, A. C. (2000). *Nonlinear science at the dawn of the 21st century*. Berlin: Springer.
- Fujioka, J. (2003). *NLS: una introducción ecuación lineal de Schrödinger*. México: UNAM.
- Gordon, J. (1983). Interaction forces among solitons in optical fibers. *Opt. Lett.*, 8, 596-598.
- Hasegawa, A., & Kodama, Y. (1995). *Solitons in optical communications*. London: Oxford University Press.
- Hernandez Tenorio, C., Villagrán Vargas, E., Serkin, V. N., Agüero Granados, T. L., Belyaeva, R., Peña Moreno, R., & Morales Lara, L. (2005). Dynamics of solitons in the model of nonlinear Schrödinger equation with an external harmonic potential: I. Bright solitons. *Kvantovaya Elektronika*, 35(9), 778-786.
- Karpman, V. I., & Solov'ev, V. V. (1981). A perturbation approach to the two soliton system. *Physica 3D*, 487-502.
- Karpman, V., & Maslov, E. (1977). Perturbation theory for solitons. *Sov. Phys. JETP*, 46(2), 291.
- Maguiña-Palma, M., Belyaeva, T., Agüero, M., García-Santibañez, F., & Serkin, V. (2019). Application of Karpman-Maslov-Solov'ev soliton perturbation theory. *Optik*, 99-104.
- Peyrard, M., & Bishop, A. R. (1989). Statistical mechanics of a nonlinear model for DNA. *Phys. Rev. Lett.*, 62, 2755-2758.
- Serkin, V. N., Hasegawa, A., & Belyaeva, T. L. (2007). Nonautonomous solitons in external potentials. *Phys. Rev. Lett*, 98, 074102(1- 4).

- Serkin, V., & Hasegawa, A. (2002). Exactly integrable nonlinear Schrödinger equation models with varying dispersion, nonlinearity and gain application for soliton dispersion. *IEEE J. Select. Topics Quant. Electron*, 418-431.
- Serkin, V., & Hasegawa, A. (2000). Soliton management in the nonlinear Schrödinger equation model with varying dispersion, nonlinearity, and gain. *JETP Lett.*, 72, 125-129.
- Taylor, J. (1992). *Optical solitons-Theory and experiment*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Yang, J. (2010). *Nonlinear waves in integrable and nonintegrable systems*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Zakharov, V., & Shabat, A. (1972). Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. *Sov. Phys. JETP*, 34, 62-69.

CC BY-NC-ND